A solução de Kaplansky para o Problema de Lucas (*)

O Problema de Luca foi formulado em 1891 pelo matemático francês Édouard Lucas e, em 1943, o matemático canadense Irving Kaplansky publica o artigo "*Solution of the problème des ménages*" no *Bulletin of the American Mathematical Society*, com uma solução para esse problema. Neste artigo, Kaplansky formula os "Lemas de Kaplansky" utilizados na solução.

Enunciado do Problema de Lucas:

"De quantas maneiras n casais, $n > 1$, podem sentar-se em cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua respectiva mulher?"

Para resolver o problema, Kaplansky utilizou também uma ferramenta já conhecida pelos matemáticos: o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

❖ **Princípio da Inclusão-Exclusão (**)**

Seja Ω um conjunto.
Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de Ω e sejam

$$S_0 = \#(\Omega),$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i),$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i \le j \le n} \#\left(A_i \cap A_j\right),$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} \#\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \dots$$

Então:

a) O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k}{k} S_{p+k}\,.$$

b) O número de elementos Ω que pertencem a pelo menos p dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k-1}{k} S_{p+k}\,.$$

c) O número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n\,.$$

(*) Material extraído do livro da Coleção do Professor de Matemática **Análise Combinatória e Probabilidade**, de autoria de Augusto César Morgado; João Bosco Pitombeira de Carvalho; Paulo Cesar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez.

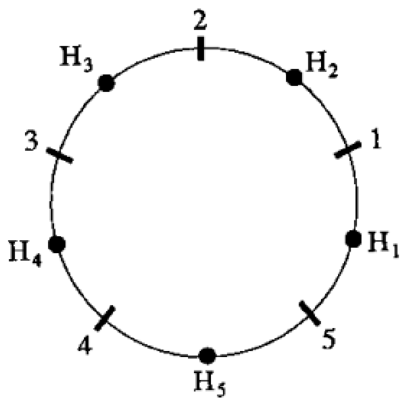
(**) A demonstração desse importante resultado da Matemática pode ser encontrada na integra no Apêndice 1 do livro da Coleção do Professor de Matemática **Análise Combinatória e Probabilidade**, de autoria de Augusto César Morgado; João Bosco Pitombeira de Carvalho; Paulo Cesar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez.

A solução de Kaplansky:

Numeramos os lugares de 1 a $2n$. A exigência de pessoas de mesmo sexo não se sentarem juntas impõe que os homens se sentem em lugares pares e a mulheres nos ímpares ou vice-versa.
Escolhido qual o sexo que ocupará os lugares ímpares (2 modos), devemos colocar os homens nos lugares a eles reservados ($n!$ modos).
Resta agora colocar as n mulheres nos n lugares restantes, sendo restrita a colocação de alguma mulher ao lado do seu respectivo marido.

A resposta do problema de Lucas é $2 \cdot (n!) \cdot U_n$, onde U_n é o número de modos de colocar as n mulheres nos n lugares vazios, sendo vedada a colocação de alguma mulher ao lado do seu respectivo marido.
Calculemos U_n.

A figura a seguir ilustra o caso $n = 5$. Devemos colocar as cinco mulheres M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 nos lugares agora numerados $1, 2, 3, 4$ e 5 de modo que M_1 não pode ocupar os lugares 5 e 1, M_2 não pode ocupar os lugares 1 e 2, M_3 não pode ocupar os lugares 2 e 3, M_4 não pode ocupar os lugares 3 e 4 e M_5 não pode ocupar os lugares 4 e 5.



Vamos definir, para $1 \leq i \leq n$:

- ✓ o conjunto das permutações das mulheres por Ω;
- ✓ o conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o i-ésimo lugar por A_i;
- ✓ o conjunto das permutações das mulheres em que M_i ocupa o $(i-1)$-ésimo lugar por A'_i.

Observação: Pela simetria do problema, consideramos, quando $i = 1$, temos $A_0 = A_n$.

Vamos arrumar os $2n$ conjuntos na seguinte ordem:

$$A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n \ .$$

Queremos calcular o valor de U_n, número de elementos de Ω que não pertencem a nenhum dos conjuntos $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \dots, A'_n, A_n$.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$U_n = a_0 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k S_k.$$

Para calcular o valor de S_k note que:

(i) Uma interseção de k dos conjuntos $A_1', A_1, A_2', A_2, \dots, A_n', A_n$ que contenha dois conjuntos consecutivos (imaginando-os em círculo) é vazia. Por exemplo, $A_1' \cap A_1 \cap \dots$ é vazia pois M_1 não pode ocupar simultaneamente os lugares 1 e n; $A_n \cap A_1' \cap \dots$, é vazia pois o n-ésimo lugar não pode ser ocupado simultaneamente por M_n e M_1.

(ii) Uma interseção de k dos conjuntos $A_1', A_1, A_2', A_2, \dots, A_n', A_n$ que não contenha dois conjuntos consecutivos (imaginando-os em círculo) é uma permutação de n elementos com k elementos em posições pré-fixadas e, portanto, possui $(n-k)!$ elementos ($k \leq n$).

(iii) Há, pelo segundo Lema de Kaplansky,

$$g(2n,k) = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

Interseções do tipo (ii).

Logo, S_k é uma soma com

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

parcelas iguais a $(n-k)!$ e com as demais parcelas nulas.

Portanto,

$$S_n = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

(Uma observação é que essa solução vale para $k = 0$, pois $S_0 = n!$).

Assim,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

e a resposta do problema de Lucas é

$$\boxed{2 \cdot (n!) \cdot U_n} \ (n > 1).$$