.Problema para ajudar na escola: Escolha de elementos em um conjunto

Problema

(A partir da 2ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Médio)

(**UECE**, 2015 – Adaptado) Um conjunto **A** é formado por exatamente oito inteiros positivos e oito inteiros negativos.
De quantas maneiras diferentes podemos escolher quatro elementos de **A**, de modo que:

(a) o produto dos elementos escolhidos seja um número positivo?

(b) o produto dos elementos escolhidos seja um número negativo?

Lembretes:

Uma das maneiras de agruparmos elementos de um dado conjunto é escolhê-los levando-se em consideração apenas a sua natureza, sem se importar em que ordem eles foram escolhidos ou apresentados. Esse tipo de agrupamento de elementos é denominado uma ***Combinação simples***. Especificamente, quando escolhemos r dentre n elementos de um conjunto dessa forma, dizemos que estamos definindo uma Combinação simples de n elementos tomados r a r.

E o legal é que, dado um conjunto finito, podemos determinar quantos agrupamentos desse tipo podemos fazer, sem que precisemos exibi-los.

- O número de Combinações simples de n elementos, tomados r a r, é denotado por $C_{n\,,\,r}$ ou C_n^r e assim definido:

$$C_{n\,,\,r}=C_n^r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!},\ \text{com } n,r\in\mathbb{N} \text{ e } 0<r\leqslant n.$$

O quociente $\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ também pode ser denotado por $\dbinom{n}{r}$ e nesse caso é denominado ***coeficiente binomial*** ou ***número binomial***.

Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para dois eventos: Se

- uma decisão **D1** puder ser tomada de m_1 maneiras distintas,
- uma decisão **D2** puder ser tomada de m_2 maneiras distintas,

e essas duas decisões forem independentes entre si (isto é, a ocorrência de uma não muda a quantidade de possibilidades para a ocorrência da outra), então a quantidade de maneiras de se tomar ao mesmo tempo essas decisões é $\boxed{m_1\times m_2}$.

Solução

(a) Inicialmente, observe que, para o produto dos quatro números escolhidos ser positivo, só existem três possibilidades:

- Os quatro números escolhidos são positivos.
- Os quatro números escolhidos são negativos.
- Dois números escolhidos são positivos e dois são negativos.

Vejam os três esqueminhas abaixo e lembrem-se de que a multiplicação de números inteiros é comutativa.

$$(+)\cdot(+)\cdot(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(-)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(+)=(+)$$

A partir dessas informações e considerando que a ordem dos números escolhidos não interfere no seu produto, podemos determinar o número de escolhas de quatro números do conjunto **A** cujo produto seja positivo utilizando **Combinações Simples** para cada um dos três casos.

► **Caso 1**: No conjunto **A** temos oito números positivos; assim, a escolha de quatro números positivos entre esses oito poderá ser feita de $C_{8,4}$ modos distintos, em que $C_{8,4}$ indica uma combinação dos 8 números positivos tomados 4 a 4:

$$C_{8,4}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{(8-4)!\,4!}=\frac{8!}{4!\,4!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\boxed{70\text{ modos}}.$$

► **Caso 2**: No conjunto **A** temos oito números negativos; logo, a escolha de quatro números negativos entre esses oito poderá, da mesma forma, ser feita de $C_{8,4}$ modos distintos, ou seja, de $\boxed{70\text{ modos}}$.

► **Caso 3**: No conjunto **A** temos oito números positivos e oito números negativos. Portanto:

- a escolha de dois números positivos entre os oito positivos poderá ser feita de $C_{8,2}$ modos distintos;
- a escolha de dois números negativos entre os oito negativos também poderá ser feita de $C_{8,2}$ modos distintos;

onde $C_{8,2}$ indica uma combinação dos 8 números positivos (ou negativos) tomados 2 a 2.

Como essas duas escolhas são independentes, pelo **Princípio Multiplicativo**, as escolhas de dois números positivos e de dois números negativos poderá ser feita de $C_{8,2}\times C_{8,2}$ modos distintos:

$$C_{8,2}\times C_{8,2}=\left(\frac{8!}{(8-2)!\,2!}\right)^2=\left(\frac{8!}{6!\,2!}\right)^2=\left(\frac{8\cdot7}{2}\right)^2=28^2=\boxed{784\text{ modos}}.$$

Somando-se os três resultados concluímos que existem $70+70+784=\boxed{924}$ formas de se escolher quatro elementos no conjunto **A**, de modo que o produto destes elementos seja um número positivo.

(b) Neste item, observamos que, para o produto dos quatro números escolhidos ser negativo, só temos duas possibilidades:

- Um dos números escolhidos é negativo e os outros três são positivos.
- Três números escolhidos são negativos e o outro é positivo.

Vejam os dois esqueminhas abaixo e lembrem-se, uma vez mais, de que a multiplicação de números inteiros é comutativa.

$$(-)\cdot(+)\cdot(+)\cdot(+)=(-)$$

$$(-)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)=(-)$$

Com essas informações e considerando que a ordem dos números escolhidos não interfere no seu produto, podemos determinar o número de escolhas de quatro números do conjunto **A** cujo produto seja negativo utilizando também **Combinações Simples** para cada um dos dois casos.

► **Caso 1**: No conjunto **A** temos oito números positivos e oito números negativos. Assim:

- a escolha de um número negativo entre os oito negativos poderá ser feita de $C_{8,1}$ modos distintos;
- a escolha de três números entre os oito positivos poderá ser feita de $C_{8,3}$ modos distintos.

Como essas duas escolhas são independentes, pelo **Princípio Multiplicativo**, as escolhas de um número negativo e de três números positivos poderá ser feita de $C_{8,1}\times C_{8,3}$ modos distintos:

$$C_{8,1}\times C_{8,3}=\frac{8!}{(8-1)!\,1!}\times\frac{8!}{(8-3)!\,3!}=\boxed{448\text{ modos}}.$$

► **Caso 2**: No conjunto **A** temos oito números positivos e oito números negativos. Logo:

- a escolha de três números entre os oito negativos poderá ser feita de $C_{8,3}$ modos distintos;
- a escolha de um número entre os oito positivos poderá ser feita de $C_{8,1}$ modos distintos.

Como essas duas escolhas são independentes, pelo **Princípio Multiplicativo**, as escolhas de um número positivo e de três números negativos poderá ser feita de $C_{8,3}\times C_{8,1}$ modos distintos, ou seja, $\boxed{448\text{ modos}}$.

Somando-se os dois resultados concluímos que existem $\boxed{896}$ formas de se escolher quatro elementos no conjunto **A**, de modo que o produto destes elementos seja um número negativo.

Observação: Poderíamos ter evitado esses cálculos e obtido a quantidade de maneiras de se escolher quatro elementos no conjunto **A** de modo que o produto destes elementos seja um número negativo calculando a quantidade de maneiras de escolher quatro elementos do conjunto **A**, C_{16}^4, e subtraindo desse total a quantidade de maneiras de se escolher quatro elementos no conjunto **A** de modo que o produto destes elementos seja um número positivo que foi calculada no **item (a)**:

$$C_{16}^4-924=\frac{16!}{(16-4)!\,4!}-924=\frac{16!}{12!\,4!}-924=1820-924=\boxed{896}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.