

## .Problema para ajudar na escola: Algarismos repetidos



### Problema

(A partir da 1ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Médio)

Quantos números de cinco algarismos têm no mínimo um algarismo repetido?

### Ajuda

**Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo:** Se

- uma decisão **D1** puder ser tomada de  $m_1$  maneiras distintas,
- uma decisão **D2** puder ser tomada de  $m_2$  maneiras distintas,
- ...
- uma decisão **Dk** puder ser tomada de  $m_k$  maneiras distintas,
- e todas essas decisões forem independentes entre si (isto é, a escolha de uma não muda a quantidade de possibilidades para a escolha de outra),

então o número total de maneiras de tomarmos sucessivamente essas  $k$  decisões é igual ao produto

$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k .$$

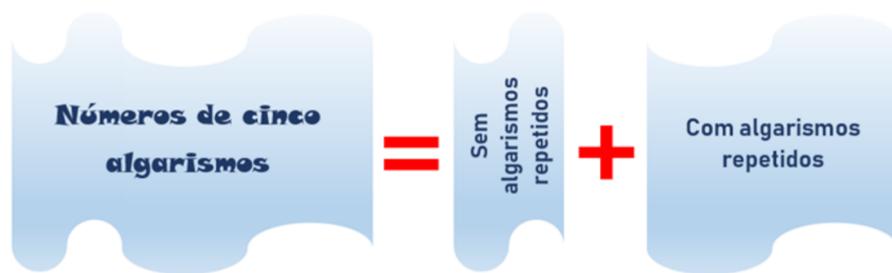
(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha [nesta Sala de Estudo](#).)



### Solução

Quando analisamos os números naturais com cinco algarismos, podemos dividi-los em dois grupos disjuntos:

- os que não têm algarismos repetidos,
- os que têm, pelo menos, um algarismo repetido.



Assim, se  $T$  é o total de números naturais com cinco algarismos,  $S$  é o total de números naturais com cinco algarismos sem algarismos repetidos e  $R$  é o total de números naturais com cinco algarismos com pelo menos um algarismo repetido, então  $T = R + S$ . Dessa forma, uma das maneiras de resolvermos o problema é determinarmos  $T$  e  $S$  e fazermos a diferença  $T - S$ .

#### • Quantidade de números naturais com cinco algarismos

Observe que em um número com cinco algarismos:

- ▶ temos 9 possibilidades para a primeira posição: 1, 2, ..., 9, já que essa posição não pode ser ocupada pelo zero (por exemplo, o número 05273 tem quatro e não cinco dígitos);
- ▶ para cada uma das demais posições, temos 10 possibilidades: 0, 1, 2, ..., 9.

$$\frac{9 \text{ escolhas}}{\text{dezena de milhar}} \quad \frac{10 \text{ escolhas}}{\text{unidade de milhar}} \quad \frac{10 \text{ escolhas}}{\text{centena}} \quad \frac{10 \text{ escolhas}}{\text{dezena}} \quad \frac{10 \text{ escolhas}}{\text{unidade}}$$

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem  $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90\,000$  números naturais com cinco algarismos e, portanto,

$$T = 90\,000 .$$

#### • Quantidade de números naturais com cinco algarismos, sem algarismos repetidos

Observe que em um número com cinco algarismos:

- ▶ Para o primeiro dígito temos as opções: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. São nove opções.
- ▶ Para o segundo dígito temos as opções de 0 a 9, exceto o algarismo que foi usado para o primeiro dígito: nove opções.
- ▶ Para o terceiro dígito temos as opções de 0 a 9, exceto os algarismos que foram usados no primeiro e no segundo dígitos: oito opções.
- ▶ Para o quarto dígito temos novamente as opções de 0 a 9, exceto os algarismos que foram usados no primeiro, no segundo e no terceiro dígitos: sete opções.
- ▶ Para o quinto dígito temos também as opções de 0 a 9, exceto os algarismos que foram utilizados nos primeiros dígitos. São  $10 - 4 = 6$  opções.

$$\frac{9 \text{ escolhas}}{\text{dezena de milhar}} \quad \frac{9 \text{ escolhas}}{\text{unidade de milhar}} \quad \frac{8 \text{ escolhas}}{\text{centena}} \quad \frac{7 \text{ escolhas}}{\text{dezena}} \quad \frac{6 \text{ escolhas}}{\text{unidade}}$$

Utilizando mais uma vez o Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que existem  $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27\,216$  números naturais com cinco algarismos não repetidos e, portanto,

$$S = 27\,216 .$$

- Finalizando, temos então  $R = 90\,000 - 27\,216 = 62\,784$  números de cinco dígitos com pelo menos um algarismo repetido.

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.

Feito com ♥ por Temas Graphene.

## Quem somos



Somando novos talentos para o Brasil

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, e tem como objetivo estimular o estudo da Matemática e revelar talentos na área.



## Programas e Portais

- Portal da OBMEP
- Programa de Iniciação Científica Jr.
- Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
- Programa de Iniciação Científica e Mestrado
- Programa de Formação de Professores
- Bolsa Instituto TIM - OBMEP

## Fale conosco

- [clubes@obmep.org.br](mailto:clubes@obmep.org.br)
- 55 (21) 2529-5251
- Horários de atendimento: segunda a sexta das 8h às 18h (horário de Brasília)
- IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
Estrada Dona Castorina, 110 - Sala 106/A - Rio de Janeiro - RJ  
CEP: 22460-320

APOIO

REALIZAÇÃO

