.Problema para ajudar na escola: Números versáteis

Problema

(A partir da 1ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Difícil**)**

(**VIII ONEM**, 2011 **–** Adaptado) Vejam que propriedade interessante o número 1037 tem:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ \hline \color{red}{8} & \color{red}{3} & \color{red}{3} & \color{red}{8} \end{array} +$$

Perceberam?

A soma de 1037 com 7301 é um *palíndromo* (ou capicua), isto é, um número que permanece o mesmo quando lemos os seus dígitos de "frente para trás" ou de "trás para frente".
Por esse motivo, 1037 é dito um número ***versátil***, de acordo com a seguinte definição:

> Um número natural de quatro dígitos é dito ***versátil*** se não for um múltiplo de 10 e, ao ser somado com o número que se obtém da inversão da ordem de seus algarismos, obtém-se um palíndromo de quatro dígitos.

Quantos números versáteis de quatro dígitos existem?

Lembrete:

✏️ **Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para duas decisões** :
Se uma decisão **A** pode ser tomada de m maneiras distintas e, tomada essa decisão **A**, uma decisão **B** puder ser tomada de n maneiras distintas, então a quantidade de maneiras de se tomar sucessivamente as decisões **A** e **B** é igual a $\boxed{m \times n}$.

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Solução

Seja $abcd$ um número versátil. (Antes de prosseguir, observe que aqui a notação $abcd$ não indica um produto e sim a representação de um número de quatro algarismos no sistema decimal.)
Assim, segundo a definição dada no problema, $P = abcd + dcba$ é um palíndromo com quatro algarismos.
Vamos observar os algarismos de milhar, centena, dezena e unidade da soma $P = abcd + dcba$ utilizando o esqueminha da adição.

$$\begin{array}{cccc} \color{red}{Mi} & \color{red}{Ce} & \color{red}{De} & \color{red}{Un} \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline \end{array} +$$

- Como P tem quatro algarismos, a soma $a+d$ que define o algarismo dos milhares de P não pode ser maior do que 9, ou seja, $\boxed{a+d \leqslant 9}$. Como P é palíndromo seu algarismo das unidades é também $a+d$.
- Como o algarismo dos milhares é exatamente $a+d$, então, na definição do algarismo das centenas da soma $abcd + dcba$, a soma $b+c$ não leva uma unidade de milhar para a soma $a+d$. Dessa forma, $\boxed{b+c \leqslant 9}$. Como P é palíndromo, seu algarismo das dezenas é também $b+c$.

$$\begin{array}{cccc} \color{red}{Mi} & \color{red}{Ce} & \color{red}{De} & \color{red}{Un} \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline a+d & b+c & b+c & a+d \end{array} +$$

Pronto, com as informações de que $\boxed{a+d \leqslant 9}$ e $\boxed{b+c \leqslant 9}$ já podemos contar quantos números versáteis existem.
Vamos lá!

$\color{red}{(1)}$ Para contar a quantidade de algarismos a e d, além da informação que $a+d \leqslant 9$, observe que o número $abcd$ tem quatro dígitos e não é um múltiplo de 10. Com isso, temos três condições: $\boxed{a+d \leqslant 9}$, $\boxed{1 \leqslant a}$ e $\boxed{1 \leqslant d}$.

- Para $a=1$, temos 8 possibilidades para d;
- para $a=2$, temos 7 possibilidades para d;
- para $a=3$, temos 6 possibilidades para d;
- para $a=4$, temos 5 possibilidades para d;
- para $a=5$, temos 4 possibilidades para d;
- para $a=6$, temos 3 possibilidades para d;
- para $a=7$, temos 2 possibilidades para d;
- para $a=8$, temos 1 possibilidade para d;
- não podemos ter $a=9$, pois, nesse caso, teríamos $d=0$.

Assim, temos $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ possibilidades para escolha simultânea de a e d.

$\color{red}{(2)}$ Para contar a quantidade de algarismos b e c, além da informação de que $\boxed{0 \leqslant b, c \leqslant 9}$, utilizaremos a informação $\boxed{b+c \leqslant 9}$.

- para $b=0$, temos 10 possibilidades para c;
- para $b=1$, temos 9 possibilidades para c;
- para $b=2$, temos 8 possibilidades para c;
- para $b=3$, temos 7 possibilidades para c;
- para $b=4$, temos 6 possibilidades para c;
- para $b=5$, temos 5 possibilidades para c;
- para $b=6$, temos 4 possibilidades para c;
- para $b=7$, temos 3 possibilidades para c;
- para $b=8$, temos 2 possibilidades para c;
- para $b=9$, temos 1 possibilidade para c.

Logo, temos $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$ possibilidades para escolha simultânea de b e c.

Finalmente, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $\boxed{36 \times 55 = 1\,980}$ números versáteis de quatro dígitos/algarismos.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Fale conosco

clubes@obmep.org.br
55 (21) 2529-5251

Horários de atendimento:
segunda a sexta das 8h às 18h (horário de Brasília)

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110 - Sala 106/A - Rio de Janeiro - RJ
CEP: 22460-320