

.Problema: Duas apostas



Problema

(Indicado a partir do 2º ano do E. M.)

(FUVEST, 2009 – Adaptado) Seis times de futebol, entre os quais estão A e B , vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A não seria campeão; na segunda, apostou que B seria o último colocado.

Responda:

- Quantas são as classificações possíveis?
- Em quantas classificações possíveis esse indivíduo ganha?

Lembrete

Dados conjuntos, C_1 e C_2 , o número de elementos da união desses dois conjuntos é dado por:

$$n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2).$$

Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo: Se

- uma decisão D_1 puder ser tomada de m_1 maneiras distintas,
- uma decisão D_2 puder ser tomada de m_2 maneiras distintas,
- ...
- uma decisão D_k puder ser tomada de m_k maneiras distintas,
- e todas essas decisões forem independentes entre si (isto é, a escolha de uma não muda a quantidade de possibilidades para a escolha de outra),

então o número total de maneiras de tomarmos sucessivamente essas k decisões é igual ao produto

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k.$$

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha [nesta Sala de Estudo](#).)



Solução

a) Pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, temos um total de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ classificações possíveis.

$$\frac{6 \text{ possibilidades}}{1^\circ \text{ lugar}} \quad \frac{5 \text{ possibilidades}}{2^\circ \text{ lugar}} \quad \frac{4 \text{ possibilidades}}{3^\circ \text{ lugar}} \quad \frac{3 \text{ possibilidades}}{4^\circ \text{ lugar}} \quad \frac{2 \text{ possibilidades}}{5^\circ \text{ lugar}} \quad \frac{1 \text{ possibilidade}}{6^\circ \text{ lugar}}$$

b) Já sabemos que o total de classificações possíveis é 720. Agora, calculemos:

- O número de classificações em que A não é primeiro lugar.**

Temos 5 possibilidades para a primeira posição, 5 para a segunda, 4 para a terceira, 3 para a quarta, 2 para a quinta e 1 para a sexta. Logo, temos um total de $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$.

- O número de classificações em que B é o último lugar.**

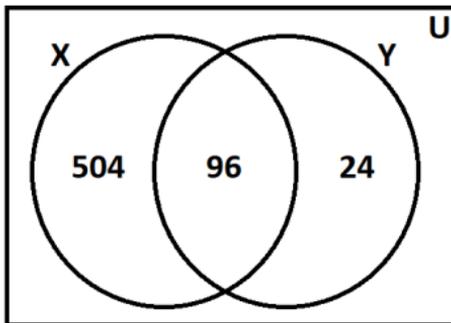
Temos 5 possibilidades para a primeira posição, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta, 1 para a quinta e 1 para a sexta. Assim, temos um total de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120$.

Agora, vejamos quantos casos correspondem à interseção dos dois casos anteriores, ou seja, A não é primeiro e B é o último. Temos 4 possibilidades para a primeira posição, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta, 1 para a quinta e 1 para a sexta. Portanto, temos um total de $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 96$.

Desta forma, são $600 + 120 - 96 = 624$ classificações possíveis para ele ganhar a aposta.

Utilizando o nosso cálculos, poderíamos ilustrar a resposta do problema por meio de um diagrama de Venn:

- Seja X o conjunto do número de classificações em que A não é primeiro lugar e Y o conjunto do número de classificações em que B é o último lugar. Como a interseção dos conjuntos citados é 96, temos o diagrama abaixo.



Portanto, a quantidade de casos pedidos é $504 + 96 + 24 = 624$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Quem somos



A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, e tem como objetivo estimular o estudo da Matemática e revelar talentos na área.



Programas e Portais

- Portal da OBMEP
- Programa de Iniciação Científica Jr.
- Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
- Programa de Iniciação Científica e Mestrado
- Programa de Formação de Professores
- Bolsa Instituto TIM - OBMEP

Fale conosco

- clubes@obmep.org.br
55 (21) 2529-5251
- Horários de atendimento: segunda a sexta das 8h às 18h (horário de Brasília)
- IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110 - Sala 106/A - Rio de Janeiro - RJ
CEP: 22460-320