.Problemão: Duas apostas

Problema
(Indicado a partir do 2º ano do E. M.)

(**FUVEST**, 2009 – Adaptado) Seis times de futebol, entre os quais estão A e B, vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A não seria campeão; na segunda, apostou que B seria o último colocado.

Responda:

a) Quantas são as classificações possíveis?

b) Em quantas classificações possíveis esse indivíduo ganha?

Lembrete

✏ Dados conjuntos, C_1 e C_2, o número de elementos da união desses dois conjuntos é dado por:
$\boxed{n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2)}$.

✏ **Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo**: Se

- uma decisão **D1** puder ser tomada de m_1 maneiras distintas,
- uma decisão **D2** puder ser tomada de m_2 maneiras distintas,
- $\cdots$
- uma decisão **Dk** puder ser tomada de m_k maneiras distintas,
- e todas essas decisões forem independentes entre si (isto é, a escolha de uma não muda a quantidade de possibilidades para a escolha de outra),

então o número total de maneiras de tomarmos sucessivamente essas k decisões é igual ao produto $\boxed{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$.

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Solução

a) Pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, temos um total de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ classificações possíveis.

$$\underset{1^o lugar}{\underline{6 \text{ possibilidades}}} \quad \underset{2^o lugar}{\underline{5 \text{ possibilidades}}} \quad \underset{3^o lugar}{\underline{4 \text{ possibilidades}}} \quad \underset{4^o lugar}{\underline{3 \text{ possibilidades}}} \quad \underset{5^o lugar}{\underline{2 \text{ possibilidades}}} \quad \underset{6^o lugar}{\underline{1 \text{ possibilidade}}}.$$

b) Já sabemos que o total de classificações possíveis é 720. Agora, calculemos:

- **O número de classificações em que A não é primeiro lugar.**

  Temos 5 possibilidade para a primeira posição, 5 para a segunda, 4 para a terceira, 3 para a quarta, 2 para a quinta e 1 para a sexta. Logo, temos um total de $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$.

- **O número de classificações em que B é o último lugar.**

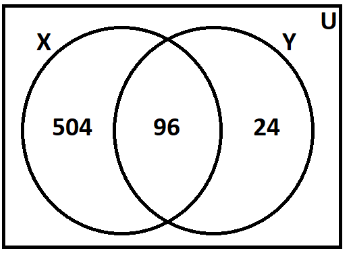
  Temos 5 possibilidades para a primeira posição, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta, 1 para a quinta e 1 para a sexta. Assim, temos um total de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120$.

Agora, vejamos quantos casos correspondem à intersecção dos dois casos anteriores, ou seja, A não é primeiro e B é o último. Temos 4 possibilidades para a primeira posição, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta, 1 para a quinta e 1 para a sexta. Portanto, temos um total de $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 96$.

Desta forma, são $600 + 120 - 96 = 624$ classificações possíveis para ele ganhar a aposta.

Utilizando os nosso cálculos, poderíamos ilustrar a resposta do problema por meio de um diagrama de Venn:

- Seja X o conjunto do número de classificações em que A não é primeiro lugar e Y o conjunto do número de classificações em que B é o último lugar. Como a intersecção dos conjuntos citados é 96, temos o diagrama abaixo.



Portanto, a quantidade de casos pedidos é $504 + 96 + 24 = 624$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.