Capítulo 3

Geometria

Retângulo áureo e divisão áurea

Geraldo Ávila

1. O retângulo áureo

Chama-se *retângulo áureo* qualquer retângulo *ABCD* (Figura 1) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como *ABFE*, o retângulo restante, *CDEF*, será semelhante ao retângulo original.

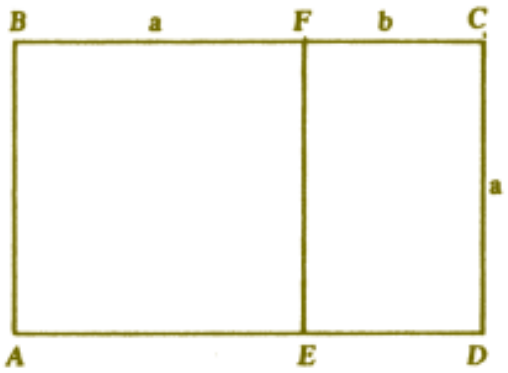


Figura 1

Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Como veremos logo adiante, esse tipo de retângulo tem muitas propriedades interessantes que justificam o qualificativo "áureo". Ele tem sido considerado por arquitetos e artistas como o retângulo mais bem proporcionado e de grande valor estético. A Figura 2 reproduz a foto de uma residência suburbana de Paris, projetada pelo famoso arquiteto Le Corbusier, na qual ele utiliza o retângulo áureo. Há aí dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente, representado pela parte da casa à esquerda da escada.

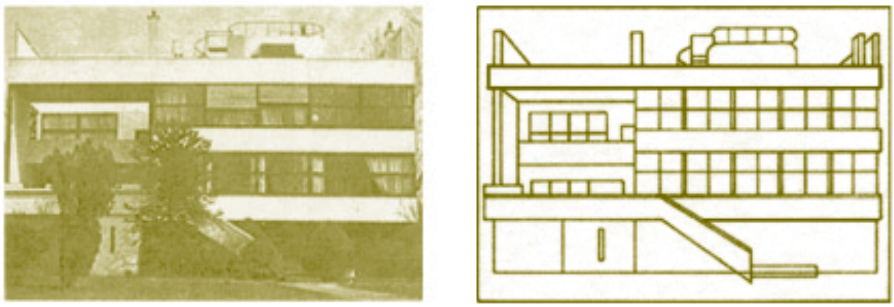


Figura 2

O Partenon (Figura 3), ou templo da deusa Atena, uma das mais admiradas obras da arquitetura universal, revela, em seu frontispício (Figura 4) um quase exato retângulo áureo. Todavia não há evidencia histórica de que, ao construir o templo no 5º século a.C., os arquitetos de Péricles tenham conscientemente usado o retângulo áureo.

Figura 3

Figura 4

Voltemos à relação (1). Dela decorre, por uma propriedade bem conhecida das proporções, que:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-a},$$

ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$.

Isto significa que se o retângulo de lados $a + b$ e a é áureo, então também o é o retângulo de lados a e b.

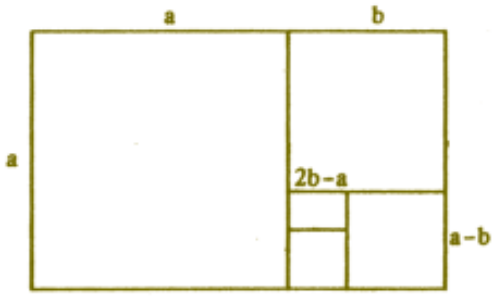


Figura 5

Evidentemente o mesmo raciocínio se aplica para mostrar que também são áureos os retângulos de lados b e $a – b$, $a – b$ e $2b – a$, etc. (Fig. 5). Em outras palavras, dados os números positivos a e b, satisfazendo a relação (1), formemos a seqüência $a + b$, a, b, a_2, a_3, ..., onde

$$a_2 = a - b,\ a_3 = b - a_2 = 2b - a,\ \text{ e, em geral } a_n = a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Trata da seqüência

$$a + b,\ a,\ b,\ a - b,\ 2b - a,\ 2a - 3b,$$

$$5b - 3a,\ 5a - 8b,\ 13b - 8a,\ \ldots \quad (2)$$

Pois bem, o raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta seqüência são os lados de um retângulo áureo. Portanto,

o processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

É fácil provar que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis. Se fossem comensuráveis, teriam um submúltiplo comum σ, de sorte que, com referencia à Figura 1,

$$AD = (a + b)\,\sigma \text{ e } AB = a\sigma$$

onde a e b seriam então números inteiros. Em conseqüência, todos os números da seqüência (2) seriam inteiros e positivos. Isto é um absurdo, pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Concluímos, então, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

2. A divisão áurea

O retângulo áureo está intimamente ligado com a chamada *divisão áurea* de um segmento, ou divisão em *média* e *extrema razão*, que introduziremos a seguir.

Diz-se que um ponto C de um segmento AB (Figura 6) divide este segmento em média e extrema razão se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \quad (3)$$

Figura 6

A relação (3) é precisamente a relação (1), se pusermos $AC = a$ e $CB = b$, de sorte que os segmentos AC e CB da divisão áurea (ou $AB = a + b$ e $AC = a$) são os lados de um retângulo áureo.

É interessante notar que se C_1 divide AB em média e extrema razão, e se marcarmos no segmento AB os pontos C_2, C_3, C_4,... de tal maneira que $AC_2 = C_1B$, $AC_3 = C_2C_1$, $AC_4 = C_3C_2$, ..., (Figura 7), então C_n divide AC_{n-1} em média e extrema razão $n = 2, 3, 4,...$ Este resultado segue facilmente do que já provamos antes sobre a seqüência infinita

Figura 7

de retângulos áureos, donde segue também que os segmentos AC_1 e C_1B da divisão áurea de AB são incomensuráveis. Sugerimos que o leitor faça uma demonstração completa destes resultados.

Como já observamos há pouco, as relações (1) e (3) são idênticas quando pomos $AC = a$ e $CB = b$. Delas segue-se que

$$b^2 = ab = a^2. \quad (4)$$

O número $m = b/a$ é conhecido como a *razão áurea*. Dividindo a equação anterior por a^2 obtemos:

$$m^2 + m = 1. \quad (5)$$

O primeiro membro torna-se um quadrado perfeito quando lhe adicionamos 1/4:

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{ou seja,} \quad \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada e notando que $m > 0$, teremos:

$$m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{portanto,} \quad m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618 \quad (6)$$

3. Construções geométricas

Vamos construir um retângulo áureo a partir de seu menor lado $AE = a$ (Figura 8). Para isso construímos $EF = AE$ perpendicularmente a AE. Com centro em G, ponto médio do segmento

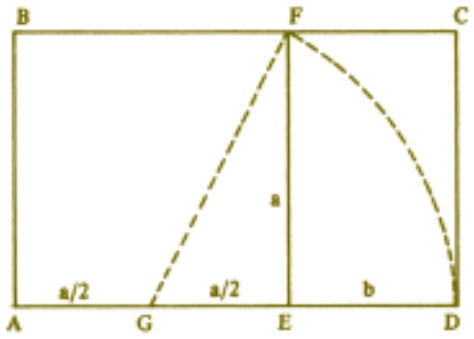


Figura 8

AE, traçamos o arco $\overset{\frown}{FD}$, onde D jaz na reta AE e E é interno ao segmento AD. Como $GF = GD = b + a/2$, o teorema de Pitágoras aplicado ao triangulo retângulo GEF nos dá:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Simplificando, obtemos daqui a relação (4) que, como vimos, equivale à relação (1). Logo $ABCD$ é um retângulo áureo.

Se o problema fosse dividir o segmento $AE = EF$ em média e extrema razão, bastaria completar a construção anterior marcando, no segmento AE, o ponto H tal que $AH = b$ (Figura 9).

Figura 9

Observações finais

A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. Ao que tudo indica, essa divisão foi descoberta no pentágono regular, que

exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Talvez este tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita (Figura 10).

Figura 10

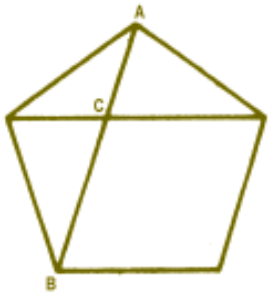


Figura 11

Como exemplo de ocorrência da divisão áurea num pentágono regular convexo mencionamos que a interseção de duas de suas diagonais divide qualquer delas em média e extrema razão. Assim, na Fig, 11,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar esse resultado.

É muito improvável que Pitágoras ou seus primeiros discípulos soubessem que os segmentos da divisão áurea fossem incomensuráveis, embora haja fundadas razões para se acreditar que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com o pentágono regular no fim do 5º século a.C. Certamente, Pitágoras e seus discípulos sabiam como construir geometricamente a solução (6) da equação (5). As construções correspondentes às Figuras 8 e 9 acima se encontram nos *Elementos* de Euclides, de cerca de 300 anos A.C.

Na antiguidade, a divisão de um segmento em média e extrema razão tornou-se tão familiar que era conhecida simplesmente como "seção", em qualquer qualificativo. O nome "divisão áurea" lhe foi dado por Kepler (1571-1630), que escreveu:

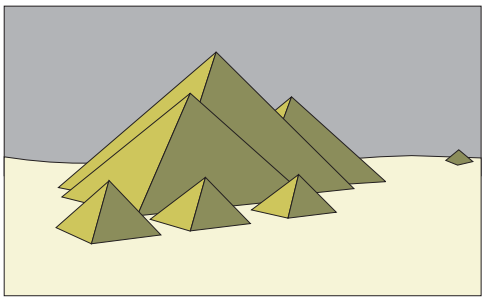
A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.

As pirâmides do Egito e a razão áurea

José Cloves Verde Saraiva

Dizemos que um ponto B divide um segmento AC em média e extrema razão quando.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$



Seja $\lambda = \frac{AC}{AB}$.

Temos:

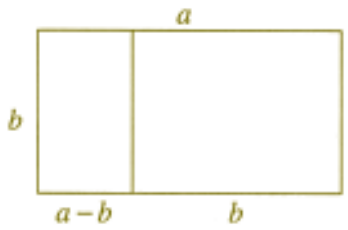
$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

Resulta que $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, isto é, que

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}68\ldots$$

A razão λ é denominada *razão áurea*.

Seja **R** um retângulo de lados a e b ($b < a$) tal que o retângulo de lados b e $a - b$ seja semelhante ao retângulo **R**.



Resulta que $a - b < b$ e que a/b é igual à razão áurea. Um retângulo **R** com essa propriedade é chamado retângulo áureo.

A divisão de um segmento em média e extrema razão já aparece no *Livro* VI de Euclides e retângulos áureos são encontrados com freqüência nas esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga. Por esse motivo a razão áurea é normalmente atribuída aos gregos. Ao que parece, ela já estava presente nas pirâmides do antigo Egito!

A relação $\lambda^2 = \lambda + 1$ mostra que um triângulo de lados 1, $\sqrt{\lambda}$ e λ é um triângulo retângulo com hipotenusa λ e catetos 1 e $\sqrt{\lambda}$.

Definição 1

Um triângulo é um *triângulo áureo* quando ele é semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa λ e catetos 1 e $\sqrt{\lambda}$.

É fácil demonstrar o seguinte:

Proposição 1

Um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c ($b > c$) é áureo se, e somente se,

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\lambda} = 1{,}272\ldots .$$

Definição 2

Seja Δ uma pirâmide reta de altura h com base quadrada de lado a e seja H a altura de suas faces. Dizemos que Δ é uma *pirâmide áurea* quando o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ for um triângulo áureo.

O historiador grego *Heródoto* (cerca de 500 a.C.) relata que aprendeu com os sacerdotes que as grandes pirâmides do Egito (construídas em torno de 2500 a.C.) satisfazem a seguinte propriedade (*P*):

(P) : A área de cada face triangular é igual à área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Com a notação da definição 2, uma pirâmide reta de base quadrada satisfaz a propriedade (*P*) se e somente se

$$\frac{aH}{2} = h^2.$$

Proposição 2

Uma pirâmide reta com base quadrada satisfaz a propriedade (*P*) se, e somente se, ela for uma pirâmide áurea.

Demonstração

Suponhamos em primeiro lugar que a pirâmide é áurea, isto é, que o triângulo retângulo com hipotenusa H e catetos h e $\frac{a}{2}$, (supondo $h > \frac{a}{2}$) é áureo.

Temos:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\lambda}, \quad H = \frac{a}{2}\lambda$$

e portanto,

$$h = \frac{a}{2}H = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \lambda = \left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda}\right)^2,$$

isto é, a pirâmide satisfaz a propriedade (*P*).

Reciprocamente, suponhamos que a pirâmide satisfaça a propriedade (*P*). Das relações

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \text{e} \quad aH = 2h^2$$

obtemos

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{4h^4}{4H^2},$$

que implica

$$\left(\frac{H}{h}\right)^4 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1.$$

Resulta que

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \lambda \quad \text{ou} \quad \left(\frac{H}{h}\right) = \sqrt{\lambda}.$$

Logo,

$$h\frac{2}{a} = \frac{H}{h} = \sqrt{\lambda}$$

e, portanto, o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ é áureo (veja Proposição 1).

As dimensões (em metros) para as pirâmides de *Quéops* (base quadrada), *Quéfren* (base quadrada) e *Miquerinos* (base retangular) são:

	Quéops	***Quéfren***	***Miquerinos***
Altura da pirâmide	146,59	143,50	65,00
Dimensões da base	230,33 × 230,33	215,20 × 215,20	102,20 × 104,60

Para *Quéops* temos

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146,59}{230,33} = 1,272.$$

Resulta que *Quéops* é, de fato, uma pirâmide áurea (Proposição 1). Entretanto, para *Quéfren*, temos

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146,50}{215,20} = 1,333,$$

de forma que *Quéfren* não é uma pirâmide áurea, Miquerinos também não é (sua base não é sequer quadrada).

A história conta que *Tales de Mileto* (624-548 a.C.), com a sombra de um bastão, determinou a altura das pirâmides do Egito e, talvez, quem sabe?, tenha verificado que a pirâmide de *Quéops* satisfaz (*P*)!

Como curiosidade, o leitor pode calcular, usando as dimensões dadas, os volumes das pirâmides e verificar que o volume de *Quéops* é maior do que a soma dos volumes de *Quéfren* e de *Miquerinos*. O leitor também pode verificar que, se as três pirâmides tivessem bases quadradas e fossem áureas (o que "quase" acontece), então, os lados das bases, a_1, a_2 e a_3, e as alturas, h_1, h_2 e h_3, satisfariam:

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow h_3^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Quando a intuição falha

Joel Faria de Abreu

Por imposição do raciocínio lógico, somos levados a demonstrar, na Matemática, até as proposições "intuitivas", tidas como óbvias. Vejamos como estamos sujeitos a erros inesperados, deixando de usar o raciocínio lógico e utilizando apenas a intuição.

Suponhamos que seja possível colocar uma corda circundando a Terra, ajustando-a ao equador. Em seguida, retiramos esta corda, aumentamos um metro no seu comprimento e a recolocamos em volta da Terra, formando uma circunferência concêntrica com o equador. Assim, teremos um vão entre o equador e a corda, ou melhor, uma diferença x entre os raios das duas circunferências. Então, perguntamos: usando-se somente a intuição, qual é o valor aproximado de x? Ou seja, qual é a largura aproximada deste vão entre o equador e a corda?

Cremos que o leitor dirá: não existe vão algum... É desprezível esta diferença... Como a Terra é tão grande e só se aumentou um metro na corda, é claro que o vão é muito pequeno e, por conseguinte, desprezível... Ledo engano! Este vão é de aproximadamente 16 cm! E estranho, pois a intuição nos leva a uma diferença muito pequena, mas recursos matemáticos – estes sim, confiáveis – nos mostram o verdadeiro valor de x. Na realidade, a intuição é um poderoso recurso da inteligência e tem sido responsável por muitas descobertas científicas. Mas, às vezes, a intuição sozinha pode induzir-nos ao erro e o fenômeno que estamos considerando é um exemplo disto.

Passemos ao cálculo de x, sendo C o comprimento do equador e r o raio da Terra, temos:

$$C = 2\,\pi\,r$$

$$C + 1 = 2\,\pi\,(r + x)$$

$$C + 1 = 2\,\pi\,r + 2\,\pi\,x$$

$$C + 1 = C + 2\,\pi\,x$$

$$2\,\pi\,x = 1$$

$$x = \frac{1}{2\,\pi} \cong 0{,}16$$

Notamos que x é independente de r; independente, portanto, do comprimento da circunferência. Repetindo-se o mesmo processo da experiência anterior, por maior que fosse o comprimento da circunferência, teríamos os mesmos 16 cm.

Passemos, agora, ao segundo exemplo: consideremos um círculo com raio igual ao raio da Terra. Suponhamos ser possível cobrir toda a superfície deste círculo por uma outra superfície, modelável, ajustada a ele. Retiramos, em seguida, esta segunda superfície, aumentamos sua área de um metro quadrado, e a remodelamos, até se transformar novamente num círculo, com área, obviamente, um metro quadrado maior. Em seguida, justapomos as duas superfícies de modo a obter dois círculos concêntricos. Assim, haverá uma diferença x entre os raios dos dois círculos. Perguntamos novamente: usando-se apenas a intuição, qual é um valor aproximado de x?

Cremos que o leitor, desta vez, alertado pelo problema anterior, teria maior cautela para emitir um juízo, baseado apenas em sua intuição. De fato, poderíamos pensar, como conseqüência do erro cometido anteriormente, que x tenha um valor constante. Mas, neste problema, tratando-se de um círculo de enorme área, a diferença é desprezível. Isto porque, agora, pela fórmula

$$A = \pi\,r^2,$$

e por um cálculo análogo ao primeiro, concluímos que x depende de r. Lançando mão do cálculo do limite, notamos também que x decresce na medida em que r cresce. Na realidade, para o valor de r = 6.355.000 m (raio da Terra), a diferença dos respectivos raios representa uma fração de milímetro. Portanto, desprezível...

De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda "IDEAL"

Geraldo Garcia Duarte Júnior

Tome uma corda esticada, unindo um ponto *A* de São Paulo a m ponto *B* do Rio de Janeiro. Suponha que a distância entre estes pontos *A* e *B* seja de exatamente 400 km. Tome outra corda com um metro a mais que a anterior, ou seja, com 400.001 metros, e fixe também suas extremidades nos pontos *A* e *B*. Ela ficará bamba. Levante esta corda pelo seu ponto médio formando um triângulo, conforme a Figura 1

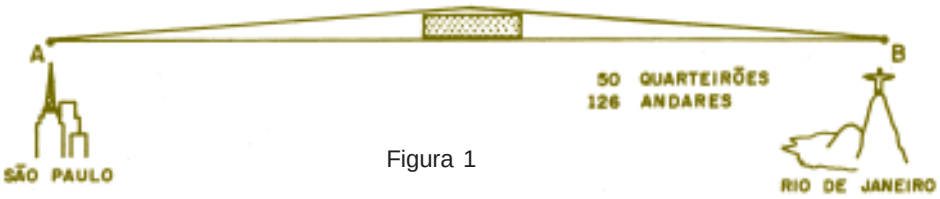


Figura 1

Pergunta-se:

i) A altura *h* deste triângulo formado será maior ou menor que um metro?

ii) O que ocorreria com a altura, se o triângulo formado fosse como o da Figura 2?

Figura 2

Por mais absurdo que possa parecer, caberia dentro do triângulo, no caso i), um prédio de forma retangular com 126 andares de altura e 50 quarteirões de comprimento!

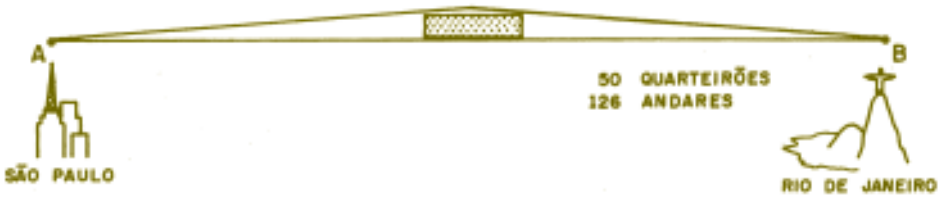
Ao fazermos as contas, vemos que a altura h será aproximadamente 447 metros no caso i) e 0,99999 metros no caso ii), que são valores bem diferentes do imaginado.

Vejamos as soluções:

i) Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 = \left[\frac{a+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{a}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}(2a+1) \ . \qquad \text{Logo, } h = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1}.$$

Sendo $a = 400.000$ m, temos $h = \frac{1}{2}\sqrt{800.001} \approx 447$ m.



ii) Neste caso temos as relações $\begin{cases} b + c = a + 1 & (1) \\ b^2 + a^2 = c^2 & (2) \end{cases}$

De (1) temos $c = a - b + 1$ que, aplicado com (2), dá

$$b^2 + a^2 = b^2 + a^2 + 1 + 2a - 2ab - 2b,$$

ou seja, $2ab + 2b = 2a + 1$. Logo, $b = \frac{2a+1}{2a+2}$.

Sendo $a = 400.000$ m, temos $b = \frac{800.0001}{800.0002} \approx 0{,}999999$ m.

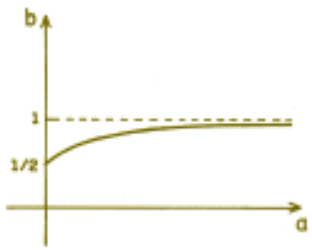
Fazendo os gráficos de h e b como funções de a, temos

Para nossa surpresa,

$h \to \infty$ quando $a \to \infty$,

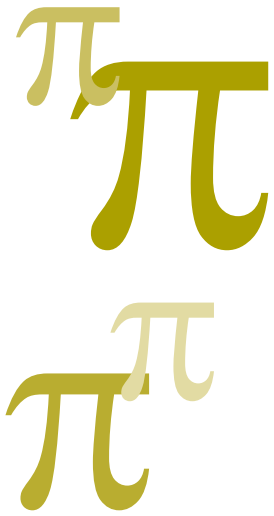
$b \to 1$ quando $a \to \infty$.

Perplexos com a solução, ficamos a imaginar por que falha a nossa intuição.



O que é o número π?

Elon Lages Lima



A maneira mais rápida de responder a esta pergunta é dizer que π é a área de um círculo de raio 1. (Por exemplo, se o raio do círculo mede 1 cm, sua área mede π cm^2). Podemos também dizer que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1.

Desde há muito tempo (cerca de 4000 anos!) notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho dessa circunferência. Dito de outro modo, se o diâmetro mede um centímetro, um metro ou um côvado, a circunferência medirá respectivamente π centímetros, π metros ou π côvados. Ainda de outra maneira: se uma circunferência tem comprimento C e diâmetro D, enquanto outra tem comprimento C' diâmetro D', então $C/D = C'/D'$. Este valor constante da razão C/D é um número aproximadamente igual a 3,141592, o qual se apresenta pela letra grega π.

Os babilônios já tinham observado que o valor de π se situa entre

$$3\frac{1}{8} \text{ e } 3\frac{1}{7},$$

ou seja, $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$.

Em frações decimais, isto dá $3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

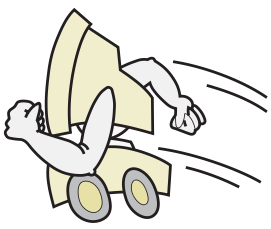
O conhecimento que as pessoas têm sobre o valor de π nem sempre melhorou com o tempo.

Por exemplo, o Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos a.C. (embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas) contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$. (Primeiro Livro dos Reis, VII: 23). É natural que os redatores do Velho Testamento, mais preocupados com assuntos divinos do que detalhes terrenos, não estivessem a par do que com seus vizinhos babilônios já sabiam há mais de um milênio. Mas, em 1931, um cidadão americano de Cleveland, Ohio, publicou um livro segundo o qual o valor exato de π seria 256/81, ou seja 3,16. O livro em si, apesar de todas as heresias que contém, não causa admiração pois o número π sempre provocou irresistível atração aos amadores, pelos séculos afora. O curioso é que o valor 256/81 é o mesmo que foi obtido pelo escriba egípcio Ahmes, autor do famoso *Papiro de Rhind*, escrito 2 mil anos antes de Cristo. Desde Arquimedes, que obteve o valor $\pi = 3{,}1416$, matemáticos se têm ocupado em calcular π com precisão cada vez maior. O inglês Willian Shanks calculou π com 707 algarismos decimais exatos em 1873. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks errava no 527º algarismo (e portanto nos seguintes). Com auxilio de uma maquininha manual, o valor de π foi então calculado com 808 algarismos decimais exatos. Depois vieram os computadores. Com seu auxílio, em 1967, na França, calculou-se π com 500.000 algarismos decimais exatos e, em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões (precisamente 10.013.395) de algarismos exatos!

Esses cálculos de π com um número cada vez maior de algarismos decimais sugerem duas perguntas. A mais inocente seria: quantos algarismos serão necessários para se ter o valor de π? Ora, sabe-se que π é um número irracional. Isto significa que nenhuma fração ordinária (e, conseqüentemente, nenhuma fração decimal finita ou periódica) pode exprimir exatamente o seu valor. Portanto, não importa quantos algarismos decimais tomemos, jamais obteremos o valor exato de π nem chegaremos a uma periodicidade (embora o erro cometido ao se substituir π por uma tal fração seja cada vez menor).

Outra pergunta que se pode fazer é: por que então tanto esforço para calcular π com centenas ou milhares de algarismos decimais? (O computador francês levou 28 horas e 10 minutos. Deus sabe quantos meses ou anos levou William Shanks). Uma resposta é que esses cálculos existem pelo mesmo motivo que existe o *Livro dos Récordes de Guinness*. Uma razão mais prática poderia ser a seguinte: um computador, como toda máquina, precisa ser testado contra possíveis defeitos, antes de começar a funcionar. Uma maneira de fazer isso é mandá-lo calcular alguns milhares de dígitos de π e fazê-lo comparar o resultado obtido com o que já se conhecia.

Mas, voltando às origens de π: desde quando tal número é representado por essa letra grega, equivalente ao nosso "π"? Nos tempos antigos, não havia uma notação padronizada para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro. Euler, a princípio, usava π ou c mas, a partir de 1737, passou a adotar sistematicamente o símbolo π. Desde então, todo o mundo o



seguiu. A verdade é que, alguns anos antes, o matemático inglês Willian Jones propusera a mesma notação, sem muito êxito. Questão de prestígio.

O número π surge inesperadamente em várias situações. Por exemplo, Leibniz notou que $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... = \pi/4$ e Euler provou que a soma dos inversos dos quadrados de todos os números naturais é igual a $\pi^2/6$. A área da região compreendida entre o eixo das abcissas e o gráfico da função $y = e^{-x^2}$ é igual a $\sqrt{\pi}$. Inúmeros outros exemplos poderiam ser mencionados, como a seguinte: a probabilidade para que dois números naturais, escolhidos ao acaso, sejam primos entre si é de $6/\pi^2$.

Desde que ficou clara a idéia de número irracional, começou-se a suspeitar que π era um deles. Euler acreditava na irracionalidade de π, mas quem a provou foi seu contemporâneo Lambert, em 1761. Pouco depois, Euler conjeturou que π seria transcendente, isto é, não poderia ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros (por exemplo, é impossível encontrar inteiros a, b, c tais que $a\pi^2 + b\pi + c = 0$). Este fato foi demonstrado em 1882 por Lindemann, 99 anos depois da morte de Euler.

Da transcendência de π resulta que o antigo problema grego da *quadratura do círculo* não têm solução.

Esse problema requeria que se construísse, com auxílio de régua e compasso, um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo dado.

Tomando o raio do círculo como unidade de comprimento, isto equivale a pedir que se construa, com auxílio de régua e compasso, um segmento de comprimento igual a $\sqrt{\pi}$ (lado do quadrado de área π).

Vamos dizer "construir o número x" para significar "construir, com régua e compasso, a partir de um segmento dado, tomado como unidade, outro segmento de comprimento igual a x".

O problema da quadratura do círculo pede que se construa o número $\sqrt{\pi}$. Isto sugere a questão mais geral: quais os números reais que se podem construir?

Ora, as construções geométricas feitas com régua e compasso consistem em repetir, um número finito de vezes, as seguintes operações básicas: 1) traçar a reta que une dois pontos dados; 2) traçar a circunferência com centro e raio de dados. Um ponto nessas construções só pode ser obtido como interseção de duas retas, de duas circunferências ou de uma reta com uma circunferência.

Considerando-se no plano um sistema de coordenadas cartesianas, uma reta é representada por uma equação do 1º grau $y = ax + b$ e uma circunferência por uma equação do 2º grau $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Assim, um número que se pode construir é sempre obtido como solução de um sistema

de 2 equações a 2 incógnitas cujos graus são ≤ 2. Prova-se, a partir daí, que se o número real x pode ser construído então x é o resultado de um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, efetuadas a partir de números inteiros.

Em particular, todo número x que pode ser construído (com régua e compasso) é algébrico, isto é, pode ser expresso como raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Como π é transcendente, $\sqrt{\pi}$ também é. Segue-se que a quadratura do círculo não pode ser feita com régua e compasso apenas. Isto encerra a questão.

Infelizmente, nem todas as pessoas que gostam de Geometria, e que se interessam por construções com régua e compasso, sabem disso. E, pensando que o problema da quadratura do círculo ainda está em aberto, imaginam soluções engenhosas, que submetem a revistas e a instituições onde se faz Matemática. Tais soluções são basicamente de 3 tipos: 1º) as que contêm erros devidos a raciocínios defeituosos; 2º) as que apresentam apenas uma solução aproximada para o problema; 3º) as que não se restringem ao uso de régua e compasso. (Por exemplo, empregando certas curvas cuja construção não pode ser efetuada apenas com esses dois instrumentos.)

Desde 1775 a Academia Real Francesa decidiu não mais aceitar para análise inúmeras propostas de quadratura para elas enviadas. Mas, em todas as partes do mundo, parece não desaparecerem nunca os quadradores.

Quando eu era estudante, na Universidade de Chicago, havia no Departamento de Matemática uma carta mimeografada que dizia mais ou menos o seguinte: "Prezado Senhor: Recebemos seu trabalho sobre a quadratura do círculo. Infelizmente estamos muito atarefados para examiná-lo. Caso o Sr. nos envie a quantia de 10 dólares, poderemos encarregar um dos nossos estudantes de pós-graduação de analisar seu trabalho e localizar os erros eventualmente nele contidos. Atenciosamente ..." Por causa desta carta padrão, vários colegas meus daquela época abocanharam alguns dólares sem fazer muita força.

O problema do retângulo inscrito

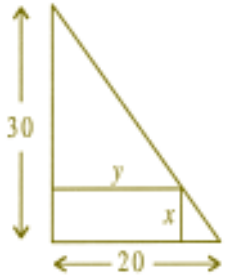
Roberto Ribeiro Paterlini

O problema do retângulo inscrito aparece no ensino médio sob várias versões:

Problema do retângulo inscrito: Dado um triângulo retângulo, dentre os retângulos inscritos conforme a figura, encontre o que tem área máxima.

Eis o mesmo problema com um enunciado mais amigável:

Problema da casa: (Vestibular da FUVEST)



Num terreno, na forma de um triângulo retângulo com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, como na figura.

a) Exprima y em função de x.

b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?

A idéia usual para a resolução deste problema é observar a semelhança entre os triângulos da figura e obter, por exemplo, a relação

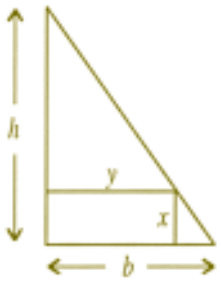
$$\frac{y}{20} = \frac{30 - x}{30},$$

donde $y = 20(30 - x)/30 = (2/3)(30 - x)$. Usando essa relação para substituir y em $A(x) = xy$, temos $A(x) = (2/3)x(30 - x)$, função que nos dá a área do retângulo. A função quadrática A tem ponto de máximo, e nosso problema estará resolvido quando encontrarmos a abcissa desse ponto, o vértice da parábola que é o gráfico da função. As raízes de A são 0 e 30, cuja média aritmética é 15. Portanto, $x = 15$ é a abcissa do vértice, e o valor correspondente para y é 10. Vemos que a altura e a base do retângulo inscrito de área máxima são a metade, respectivamente, da altura e da base do triângulo.

Em um triângulo retângulo qualquer com base b e altura h o resultado é o mesmo: o retângulo inscrito de maior área (entre os retângulos posicionados como na figura) é o que tem base $b/2$ e altura $h/2$. Na figura

$$\frac{y}{b} = \frac{h - x}{h}, \; A(x) = \frac{b}{h}x(h - x)$$

ponto de máximo de $A : x = \frac{h}{2}$, valor de $y : \frac{b}{2}$.



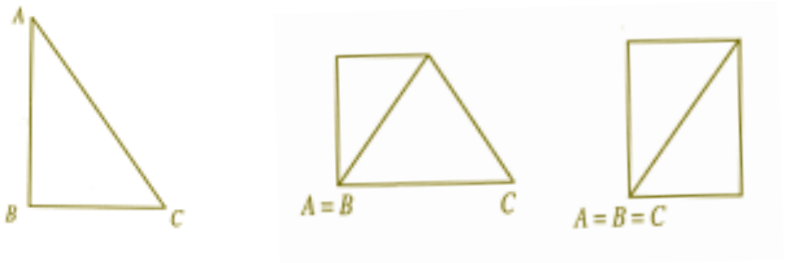
Usando dobradura

No ano de 2000 estava lecionando uma disciplina de problemas para alunos do Curso Noturno de Licenciatura em Matemática da UFSCar, e certo

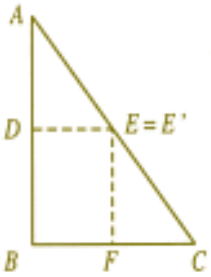
dia sugeri aos estudantes resolverem esse problema. Minha expectativa era que utilizassem o método descrito acima, e de fato muitos assim o fizeram. Mas tive a agradável surpresa de ver que a estudante Tatiana Gaion Malosso, juntamente com os colegas de seu grupo de trabalho, resolveu facilmente o problema usando dobraduras. Quando incentivamos a criatividade, podemos ver as soluções mais interessantes e aprendemos a pensar com liberdade.

Vamos descrever a solução por dobradura apresentada pela estudante. Tomamos uma folha de papel e a cortamos no formato de um triângulo retângulo ABC.

Dobramos o papel de modo a fazer coincidir o ponto A com o ponto B, e em seguida dobramos de modo a fazer coincidir o ponto C com o ponto B, como nas figuras abaixo.



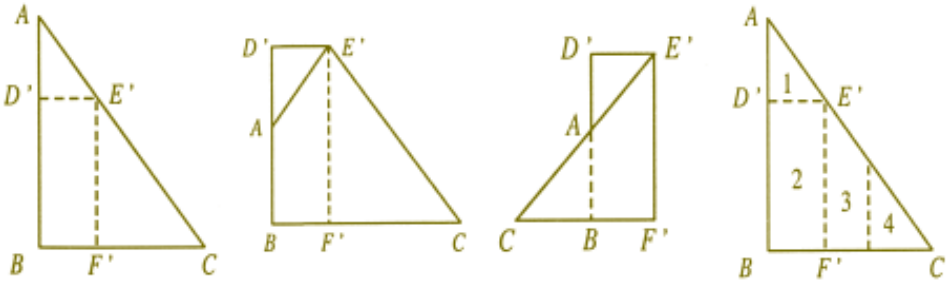
Desdobrando e voltando ao triângulo original, vemos que marcamos duas linhas que se encontram no ponto médio de $\overline{AC}$.



De fato, por construção, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, logo, E é o ponto médio de $\overline{AC}$. Da mesma forma, F é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{FE'}$ é paralelo a $\overline{AB}$, logo, E' é o ponto médio de $\overline{AC}$, e $E = E'$

As duas linhas que marcamos no triângulo determinam um retângulo, cuja altura é a metade da altura do triângulo, e cuja base é a metade da base do triângulo. Observamos que o triângulo original ficou subdividido em três figuras, dois triângulos menores e o retângulo, e a dobradura deixa claro que a soma das áreas dos dois triângulos menores é igual à do retângulo. Portanto, a área do retângulo é a metade da área do triângulo original.

Vamos verificar, usando dobradura, que esse retângulo é o de maior área que se pode obter. Tomamos um outro retângulo inscrito, $BD'E'F'$.



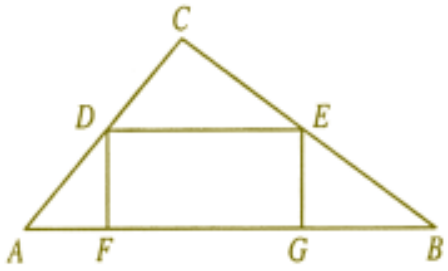
Dobramos o papel na linha $\overline{D'E'}$ (veja as figuras) e tracejamos o segmento $\overline{AB}$ indicado na terceira figura. Em seguida dobramos na linha $E'F'$ passando pelo ponto A marcado.

O triângulo original fica subdividido em quatro regiões, 1, 2, 3 e 4, de modo que somando as áreas de 1 e 3 obtemos a área de 2 (confira na figura). Mas, como temos a área de 4, vemos que a área de 2 é menor do que a metade da área do triângulo. Portanto, o retângulo $BD'E'F'$ não tem área máxima

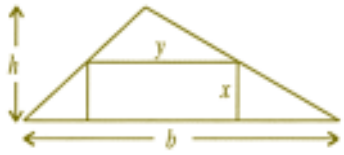
Outros desenvolvimentos

Em qualquer triângulo existe um retângulo inscrito. De fato, um triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. Na figura a seguir supomos $\angle A$ e $\angle B$ ângulos agudos e construímos o segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{AB}$. Em virtude de serem $\angle A$ e $\angle B$ agudos, os segmentos perpendiculares a $\overline{AB}$ por D e E intersectam $\overline{AB}$, e obtemos um retângulo inscrito no triângulo.

O leitor pode observar que em um triângulo podem existir retângulos inscritos em até três posições diferentes, com um lado do retângulo sobre um lado diferente do triângulo.



Qualquer que seja a posição, a maior área do retângulo inscrito que se pode obter é a metade da área do triângulo.



$$\frac{y}{b} = \frac{h-x}{h}, \quad A(x) = \frac{b}{h}x(h-x);$$

ponto de máximo de A: $x = h/2$; valor correspondente de y: $b/2$.

Podemos novamente usar dobradura para encontrar o retângulo inscrito de área máxima. Seja ABC um triângulo qualquer, e suponhamos que $\angle A$ e $\angle B$ são agudos. Cortamos um papel na forma do triângulo dado. Usando dobradura, marcamos a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$. Dobramos o triângulo de modo a fazer coincidir o ponto C com o pé desta altura no lado $\overline{AB}$. Continuamos procedendo de modo análogo ao caso do triângulo retângulo.

Triângulos especiais

Rizio Sant'Ana

Teorema

Só *existem cinco triângulos que tenham perímetro numericamente igual* à *área, quando fixamos a unidade* e *exigimos que os lados do triângulo tenham medidas inteiras.*

Demonstração

Sejam a, b, c as medidas dos lados de um triângulo na unidade fixada, p o perímetro e s o semiperímetro. Então, impondo que a área e o perímetro sejam medidos pelo mesmo número (perímetro na unidade e área na unidade ao quadrado), teremos:

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ou seja $4s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Seja $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$ e como

$s - a + s - b + s - c = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$

temos que $s = x + y + z$ e podemos escrever

$$4(x + y + z) = xyz \quad \text{(I)}$$

Como $s = x + y + z$ e $a = s - x$, temos que $a = y + z$; também $b = x + z$ e $c = x + y$

Demonstremos que o perímetro tem que ser par. Ora,

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

ou seja

$$p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}$$

Para P ser ímpar

- ou um dos lados é ímpar e os outros dois lados são pares;
- ou a, b *e* c são, os três, ímpares;

em qualquer dos dois casos, a raiz quadrada do numerador é ímpar e p não pode ser inteiro.

Então o perímetro é sempre par, e s *é* inteiro, o que acarreta serem x, y, e z também inteiros.

1. O triângulo não pode ser eqüilátero. Nesse caso $x = y = z$ e, por (I), $4(3x) = x^3$ ou $x^2 = 12$, o que não produz número inteiro para x.
2. O triângulo não pode ser isósceles. Nesse caso $z = y$, por exemplo, e (I) se transforma em $4(x + 2y) = xy^2$ ou $xy^2 - 8y - 4x = 0$, donde y, para ser inteiro, vai depender de que $4 + x^2$ seja um quadrado perfeito, o que não acontece para nenhum $x > 0$, inteiro.
3. Então x, y e z são inteiros e diferentes e o triângulo será escaleno. Façamos sempre $z > y > x \geq 1$; x não pode valer zero, porque senão $a = s$ e não existe triângulo. Então o menor x é 1, se possível.

   Isolando z:

$$z = \frac{4(x+y)}{xy-4} \quad \text{(II)}$$

Para $x = 1$, $z = \dfrac{4(1+y)}{y-4}$; para $\begin{cases} y = 5, & z = 24 \\ y = 6, & z = 14 \\ y = 8, & z = 9 \end{cases}$

Outros valores de y ou não produzem z inteiros, ou produzem $z < y$.

Para $x = 2$, $z = \dfrac{4(2+y)}{2y-4}$; para $\begin{cases} y = 3, & z = 10 \\ y = 4, & z = 6 \end{cases}$

Outros valores de y ou não produzem z inteiros, ou produzem $z < y$.

Qualquer outro valor de x: terá $y < x$ para z ser inteiro.

Lembrando que $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, podemos escrever:

a	*b*	*c*	perímetro = área
29	25	6	60
20	15	7	42
17	10	9	36
13	12	5	30
10	8	6	24

Estes lados definem os únicos cinco triângulos que satisfazem as condições exigidas.

Com efeito, um triângulo que tenha lados medindo 10, 8 e 6 unidades terá, como acabamos de ver, perímetro numericamente igual à área nessa unidade. Construa, então, um triângulo com 10, 8 e 6 cm de lados e torne a medir seus lados em milímetros: ele terá, agora, um perímetro de 240 mm e área de 2400 mm^2. O fenômeno da igualdade desapareceu!

De fato, na equação de partida

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

pensados como medidas, o 1º membro dá o número de unidades e o 2º dá o número de unidades ao quadrado. Há uma diferença na dimensão.

Não só essa propriedade de coincidência numérica da área e perímetro não resiste à mudança de unidades como também ela não é privilégio de certos triângulos. De fato, dado um triângulo qualquer, existe sempre uma unidade de comprimento em que o perímetro seja o mesmo que a área: basta tomar o perímetro p' numa unidade u' qualquer e a área A' na unidade $(u')^2$ tomar a nova unidade $u = (A'/p')u'$. O leitor pode verificar que, na unidade u, o perímetro e a área do triângulo dado se medem pelo mesmo número.

Acontece entretanto que, nem sempre, as medidas dos lados, nessa unidade u, serão números inteiros. O teorema do artigo prova que essas medidas só serão, as três, dadas por números inteiros se o triângulo de partida for semelhante a um daqueles 5 triângulos encontrados. Nesse contexto, eles são especiais.

A demonstração feita por Heron

Mário Dalcin

Quando pequeno, li sobre Heron de Alexandria em uma enciclopédia biográfica que havia em casa. Fiquei sabendo que ele viveu no século II d.C. na cidade de Alexandria, obviamente, que foi engenheiro e matemático. Não me lembro que outras coisas mais havia sobre Heron, mas ficou gravada em minha memória a fórmula que lá estava para calcular a área de um triângulo:

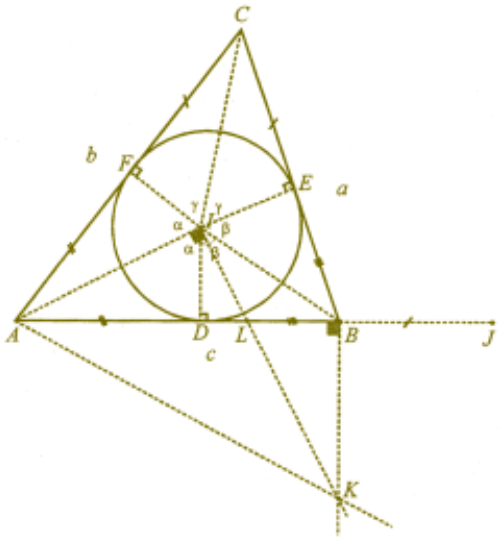
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo p a metade do perímetro do triângulo.

O que me encantou nessa fórmula? Não sei. Talvez por ter uma raiz quadrada, que naqueles dias escolares lhe dava um ar de Matemática superior; ou pelo fato de só usar os lados do triângulo, e não a altura, como na *formulinha* usada na escola.

Anos mais tarde, após ter encontrado várias vezes a fórmula e até depois de ter visto sua demonstração como mero corolário de um cálculo de medianas, continuava intrigado: como Heron a havia demonstrado?

Após ler a resenha publicada em *Livros* da **RPM** 31, comprei o livro *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, e qual não foi minha surpresa ao encontrar na página 205 a menção de que, a **demonstração feita por Heron** (que está em seu livro *A métrica*) estava esquematizada no exercício 6.11 d). Com algumas pequenas modificações, aqui vai ela:



1.

Área ΔABC = área ΔABI + área ΔIBC + área $\Delta AIC = \frac{r}{2}(AB + BC + CA) = rp$.

2. Como $\Delta ADI \equiv \Delta AIF$, $\Delta DBI \equiv \Delta IBE$ e, $\Delta FIC \equiv \Delta IEC$, temos $AD = AF$, $DB = BE$ e $CE = CF$.

3. Seja J o ponto da semi-reta AB tal que $BJ = CE$.

$$AJ = \frac{AD + AF}{2} + \frac{BD + BE}{2} + \frac{CE + CF}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = p.$$

Então $p - c = AJ - AB = BJ$, $p - b = AJ - AC = DB$ e $p - a = AJ - BC = AD$.

4.

i) Seja K o ponto construído como indicado na figura. O quadrilátero $AKBI$ é inscritível numa circunferência de diâmetro AK; logo $\angle AIB + \angle AKB = 180^o$ e, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ temos $\angle AIB + \angle CIE = 180^o$, de onde $\angle AKB = \angle CIE = y$.

Então temos $\Delta CBI \approx \Delta AKB$, o que implica $\frac{AB}{BK} = \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r}$.

ii) No triângulo retângulo ΔALI temos $r^2 = DL \cdot AD$ e de $\Delta DLI \approx \Delta BLK$ (verifique) temos $\frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL}$..

iii) De i) e ii) temos $\frac{AB}{BJ} = \frac{LB}{DL}$, o que implica $\frac{AB + BJ}{BJ} = \frac{LB + DL}{DL}$ ou $\frac{AJ}{BJ} \cdot \frac{AJ}{AJ} = \frac{DB}{DL} \cdot \frac{AD}{AD}$,

que juntamente com $r^2 = DL \cdot AD$ leva a $AJ^2 \cdot r^2 = BJ \cdot AJ \cdot BD \cdot AD$.

Usando-se as igualdades apresentadas em **3**, obtemos

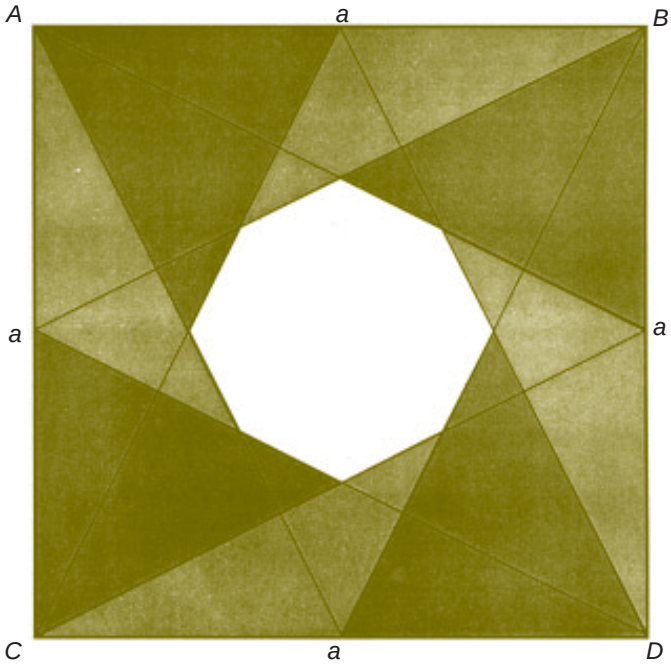
$$p^2r^2 = (p - c)p(p - b)(p - a),$$

que, pela igualdade exibida em **1**, demonstra a fórmula.

Octógono Perverso

Cláudio Arconcher

VOCÊ ACHA QUE O OCTÓGONO CONSTRUÍDO ABAIXO É REGULAR? SIM? POIS É... É POR ISSO QUE É PERVERSO!



Octógono: perverso ou genial?

Comentários enviados por leitores

1. Um leitor não achou o octógono tão perverso assim e notou nele peculiaridades curiosas:

• há simetria em relação às diagonais que contêm o centro do quadrado;

• os 8 lados são iguais e também são iguais os ângulos opostos;

• os triângulos retângulos cujas hipotenusas ligam um vértice do quadrado ao ponto médio de um lado e não têm lados em comum com o quadrado são semelhantes ao triângulo de lados 3, 4 e 5.

2. Outro leitor e colaborador da revista preferiu chamar o tal octógono de genial e não de perverso, pois é possível calcular várias medidas de ângulos e segmentos que se formam, mostrando que o octógono não é regular de dois modos: verificando que seus ângulos internos não são todos congruentes entre si ou constatando que há duas diagonais que passam pelo centro do quadrado e que não são congruentes, uma delas é a metade do lado do quadrado de partida e a outra é a terça parte da diagonal desse quadrado. Sugere, então, um outro problema ao leitor: obter por meio de dobras um octógono regular a partir de uma folha quadrada de papel.

Bom senso, realidade e melhores idéias matemáticas

Nilza Eigenheer Bertoni

Desvendando a Geometria da 7ª Série: Ângulos e Arcos de Círculos

Vários livros de Matemática para a 7ª série que temos examinado afirmam, incondicionalmente, que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente. Apresentam exemplos e exercícios resolvidos onde se diz que o arco subtendido por um ângulo central de *x* graus mede *x* graus.

De modo como são colocadas, as definições (às vezes chamadas de axiomas) são destituídas de clareza, e até de bom senso. Transcrevemos, com comentários, algumas dessas afirmações.

Frase 1

"A medida de um arco menor de circunferência é, por definição, a medida do ângulo central compreendido entre seus lados e vice-versa."

Poderíamos então concluir que dado um ângulo central de 45º, o arco correspondente mede também 45º, já do "vice-versa" concluiríamos que, se um arco mede 3 cm, o ângulo central associado também mediria 3 cm (!).

Aliás, exatamente a essa interpretação nos conduz um outro autor:

Frase 2

"A medida de um ângulo central é igual à medida do arco de circunferência compreendido entre seus lados."

Ora, como a única medida de arcos conhecida até então era a medida dos seus comprimentos (feita a partir do estabelecimento de uma relação entre o arco e a circunferência total, de comprimento $2\pi R$), a definição acima nos leva a pensar em atribuir a ângulos centrais a medida dos arcos compreendidos e teríamos, por exemplo, ângulos com πR, unidades de comprimento.

O primeiro autor sugeria ainda, no texto, que os alunos poderiam ter concluído a definição dada, com auxílio de transferidor.

Mas os alunos devem entender o transferidor como um instrumento que lhes permite ver quantos ângulos de 1 grau cabem no ângulo a ser medido; em nenhum momento foram ensinados a medir arcos com auxílio do transferidor.

Um terceiro autor afirma que:

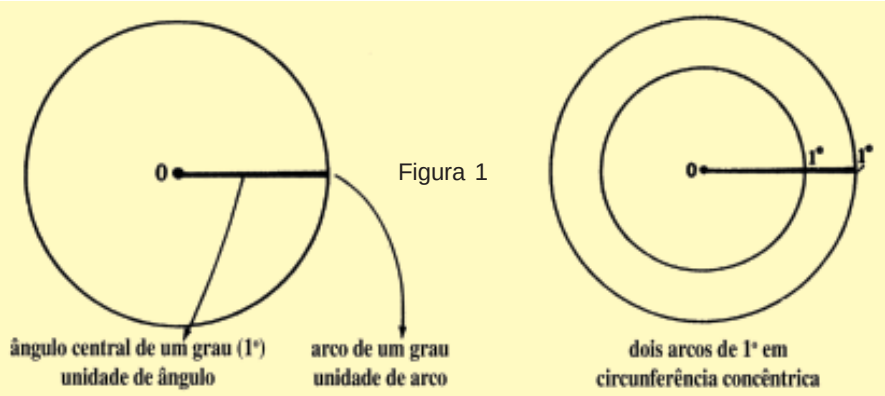


Figura 1

Logo de início as figuras nos causam estranheza: lá estão 2 arcos nitidamente diferentes, ambos unitários. A unidade é ambígua?

Poderíamos neste caso solicitar arame de um vendedor para fazer um arco de 1º, e ele tanto nos poderia dar 1 mm de arame como milhares de quilômetros, e estaria certo, em qualquer caso.

Por outro lado, as definições levam também ao seguinte: arcos de comprimentos iguais poderão ter medidas, em graus, distintas.

Frase 3

"A medida de um ângulo central é igual à medida do arco correspondente, na unidade graus."

Como aparentemente está definido a primeira (medida de ângulo) supondo conhecida a segunda (medida do arco), e não há informação prévia de como este poderia ser medido em graus, a frase dá imagem a dúvidas.

Finalmente num quarto autor encontramos a frase seguinte, juntamente com as ilustrações e legendas da Figura 1.

Frase 4:

"A unidade de arco (ou arco unitário) é o arco determinado na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo)."

Na Figura 2 o arco *AB* mede um quarto do comprimento total da circunferência, isto é

$$\frac{2\pi R}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57 \text{ cm.}$$

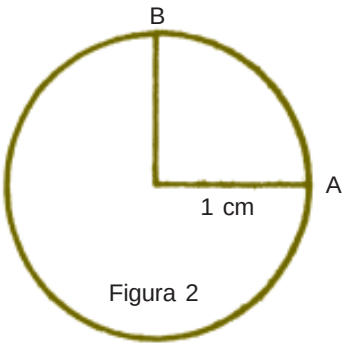


Figura 2

Na Figura 3 o arco *CD* mede um oitavo do comprimento total da circunferências,isto é,

$$\frac{2\pi R}{8} = \frac{2\pi \times 2}{8} = \frac{\pi}{2} \cong 1.57 \text{ cm.}$$

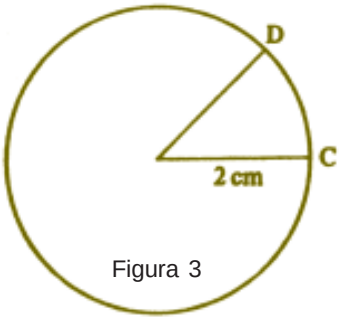


Figura 3

Embora tenham comprimentos iguais, as definições apresentadas nos permitem dizer que a medida do primeiro, em graus, é 90º, e a do segundo, 45º. Outro exemplo insólito é o da Figura 4, onde, dado o ângulo $\hat{P}$ inscrito na circunferência maior, pode-se concluir, segundo os autores, que $m(CD) = 40^{\circ}$ e $m(AB) = 80º$.

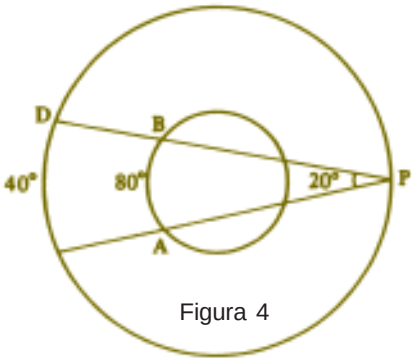


Figura 4

As definições como vimos, conturbam bastante a clareza das idéias essenciais em Matemática, que sempre desejamos passar aos nossos alunos.

Para começar a desanuviar a confusão criada, lembramos que as frases estariam mais corretas se os au-

tores houvessem frisado que iam introduzir a *medida angular* de um arco. Pelo menos a Frase 1 ficaria correta se começasse por: "A medida angular de um arco...", suprimindo ao final a palavra *vice-versa*.

Poderíamos então ter, em circunferências concêntricas, arcos diferentes com a mesma medida angular e deveríamos chamar a atenção dos alunos para isto. Infelizmente os livros são obscuros e não esclarecem a diferença entre medida angular de um arco e seu comprimento. Consideramos essencial tornar claros esses pontos, quando os alunos estão iniciando o aprendizado dessa teoria.

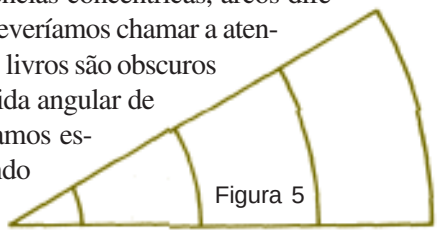


Figura 5

Na verdade, a propriedade mais natural a ser medida num arco é o seu comprimento. Se propusermos aos alunos que determinem a medida de um arco semicircular, a ser feito sobre uma porta de 90 cm de largura, esperamos que (usando de bom senso e realidade) eles nos respondam algo como 1,41 m, e não 180 graus. Analogamente, ao ler a questão "Qual é a medida do arco que é igual à quinta parte da circunferência?", um aluno de bom senso responderia

$$\frac{2\pi R}{5}\ .$$

Não obstante, segundo os autores, a resposta correta seria 72º.

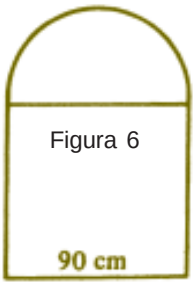


Figura 6

No caso de introduzir-se medida angular de um arco de circunferência, é necessário frisar que não se está absolutamente medindo o comprimento do arco, mas outra propriedade associada a ele, a saber, a abertura do ângulo *central* correspondente.

Visto que o conceito de medida angular de um arco requer cuidados ao ser dado, para que sejam transmitidas as verdadeiras idéias matemáticas envolvidas, ocorre-nos que devemos refletir sobre a necessidade ou urgência de darmos este conceito nesta fase de currículo.

Seria tal conceito imprescindível para o prosseguimento da teoria? Um dos primeiros usos que os autores fazem da definição é ao enunciarem a propriedade do ângulo inscrito numa circunferência.

Frase 1'

A medida de ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco interceptado pelos seus lados.

Frase 2'

A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente.

Frase 4'

A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

Ou, segundo os autores, a situação pode ser ilustrada pela Figura 7, de difícil entendimento pelos alunos.

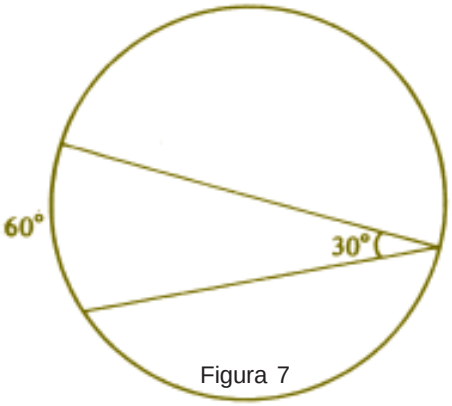


Figura 7

Na verdade, o uso da medida de arco feita pelos autores leva a uma fictícia simplificação da linguagem, que ao final camufla os fatos matemáticos envolvidos. O que os autores teriam a dizer, de modo claro, seria o seguinte: "A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente", o que dispensaria totalmente o conceito de medida angular de arco.

(É curioso notar que o autor 2 do problema enuncia desse modo, mas em seguida acha necessário reenunciar em termos da medida de arco).

Costumamos explorar a propriedade num "Geoquadro circular". Trata-se de uma placa de madeira, na qual desenhamos um círculo dividido em 24 ângulos de 15º. No centro, e em cada ponto divisório dos arcos são colocados pregos, enterrados apenas até a metade (Figura 8). Podemos marcar, com elásticos presos aos pregos, ângulos inscritos a 60º, 45º, 30º, com auxílio dos esquadros. A medida do ângulo central correspondente poderá nestes casos, ser lida diretamente, contando-se o número de ângulos de 15º contidos no ângulo central. A situação mostrada no geoquadro torna-se bastante clara e elucidativa, como mostra a Figura 8.

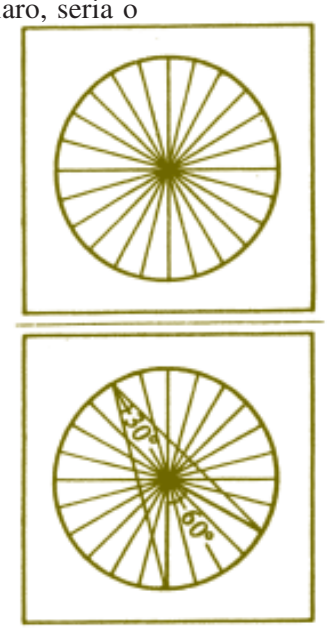


Figura 8

Quatro corolários imediatos são os que damos a seguir, ilustrados pelas Figuras 9, 10, 11 e 12:

1) dois ângulos inscritos numa circunferência, que determinam sobre ela arcos iguais, são iguais (ambos valem a metade do mesmo ângulo central; ou de ângulos centrais iguais);

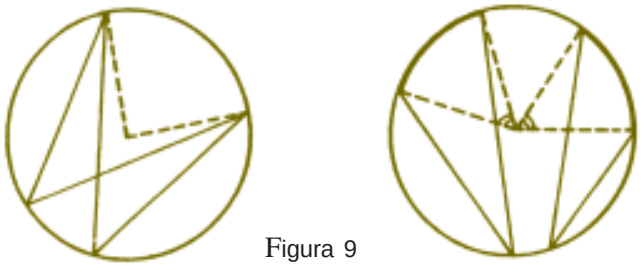


Figura 9

2) um ângulo inscrito numa circunferência, cujos lados encontram a mesma nos pontos extremos de um diâmetro, é reto (a Figura mostra que, no caso, o ângulo central mede 180º);

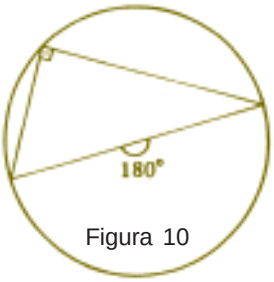


Figura 10

3) duas cordas que se cruzam determinam triângulos semelhantes. De fato, pelo Corolário 1, os ângulos inscritos sombreados são iguais, há 2 ângulos opostos pelo vértice, logo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ também são iguais; aliás poderíamos de partida ter notado que $\hat{A} = \hat{B}$ também pelo corolário 1;

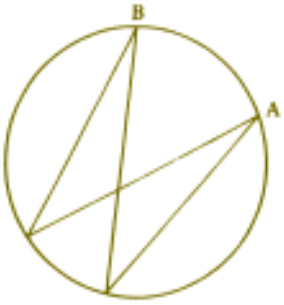


Figura 11

4) num quadrilátero inscrito num círculo, ângulos internos opostos são suplementares. O ângulo interno $\hat{A}$ é igual à metade do ângulo $\hat{E}$, o ângulo interno $\hat{C}$ é igual à metade do ângulo $\hat{F}$, logo

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\hat{E}}{2} + \frac{(360 - \hat{E})}{2} = 180^\circ \cdot$$

Estes são os fatos fundamentais relacionados à propriedade citada, e que os alunos devem conhecer de modo claro e sedimentado. Permitem a resolução de um número grande de problemas interessantes.

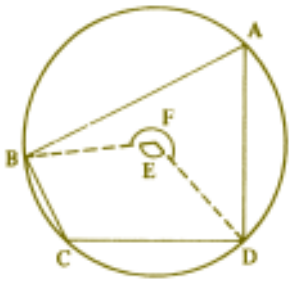


Figura 12

Há outros dois resultados, que também são conseqüências quase imediatas do Teorema do Ângulo Inscrito. Referem-se a ângulos internos ou externos aos círculos, que valem "a semi-soma ou a semi-diferença dos arcos". Não são tão importantes que mereçam destaque especial, e introduzi-los nesta fase é dar ênfase a detalhes. Há livros que mencionam inclusive nomes para os ângulos em questão: "ângulo excêntrico interior" e "ângulo excêntrico exterior", num evidente exagero de terminologia. Somos de opinião que a maturidade dos alunos em aplicações do Teorema do Ângulo Inscrito os levará a resolverem de modo natural, fundamentados em argumentos geométricos, os problemas em que aparecem tais ângulos. Mentalizar mecanicamente esses resultados na 7ª série é contraproducente à evolução do amadurecimento geométrico dos alunos. Não devemos sobrecarregá-los com fórmulas e resultados secundários, e solicitar deles mera aplicação imediata dos mesmos, num processo que envolve mais memória do que raciocínio.

Em resumo, deixamos algumas recomendações aos professores de 7ª série, que desejam para seus alunos o aprendizado desses fatos geométricos que, além de claro, permaneça para além das provas.

Círculos – Ângulos Inscritos

1) Faça seu aluno entender claramente o que é um ângulo inscrito, o que é um ângulo central, e quando um é correspondente do outro.

2) Ignore o conceito de medida de um arco em graus.

3) Faça-os certificarem-se experimentalmente de que: "O ângulo inscrito num círculo é igual à metade do ângulo central correspondente". Este é um resultado fundamental. Esteja certo de que seus alunos o dominam.

4) Conseqüência imediata: Ângulos inscritos que determinam arcos iguais são iguais.

5) Lembre e use muito o fato de que o ângulo que corta a circunferência nas extremidades de um diâmetro mede 90º (vale a recíproca).

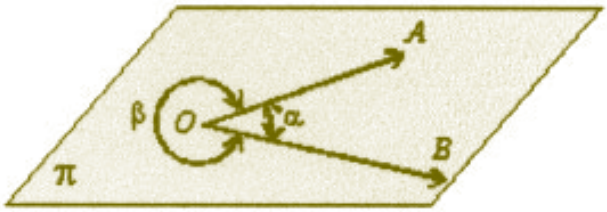
6) Outra conseqüência: cordas que se cruzam determinam triângulos semelhantes.

O conceito de ângulo

Cláudio Arconcher

O Introdução

A **RPM** recebeu, há tempos, um artigo do Prof. Scipione Di Pierro Netto, abordando o conceito de ângulo. Ao ser apreciado pelo Comitê Editorial veio à tona um problema que nós, professores de Matemática, enfrentamos com freqüência: é melhor definir ângulo como uma região do plano, ou como uma reunião de duas semi-retas? Neste número apresentamos uma defesa do conceito de ângulo como uma região de um plano e agradecemos ao Prof. Scipione por ter levantado o problema.



Definição

Considere duas semi-retas de mesma origem, não opostas, contidas num plano π. Elas separam o plano π em duas regiões, uma convexa que denominamos **ângulo convexo**, outra côncava que denominamos **ângulo côncavo**.

Dizemos que as semi-retas OA e OB são os lados do ângulo e fazem parte dele.

Se houver ambigüidade na identificação do ângulo pela notação tradicional $A\hat{O}B$, devemos providenciar nomes exclusivos para cada um deles, α e β como na figura, ou especificar de qual dos ângulos estamos falando.

Caso as semi-retas sejam opostas, teremos o plano dividido em dois semi-planos. Denomina

mos cada um deles de *ângulo raso*. Se as semi-retas são coincidentes, dizemos que temos um par de ângulos: um *ângulo nulo* que se reduz a semi-reta e um *ângulo de uma volta* que é o plano todo. Aqui deve-se notar a existência dos lados coincidentes. Em todos os casos o ponto O é o vértice do ângulo.

Em seguida atribui-se *medida* ao ângulo. Define-se então o grau sexagesimal. Ângulos convexos apresentam medidas menores do que 180^o; ângulos côncavos, medidas maiores do que 180^o. Ao ângulo raso atribui-se 180^o, ao ângulo nulo, 0^o e ao ângulo de uma volta, 360^o.

Muitas são as situações em sala de aula nas quais o conceito de ângulo como região do plano facilita o entendimento. Vejamos dois casos:

Exemplo 1

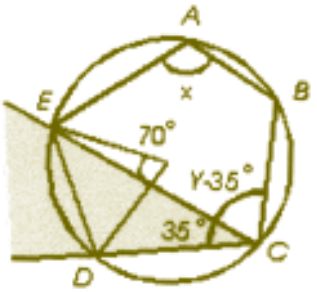
Na figura abaixo temos um pentágono inscrito na circunferência. Determine o valor da soma $x + y$.

O aluno deve reconhecer os ângulos de medidas x e y como ângulos inscritos e lembrar-se do teorema que relaciona o ângulo inscrito com o ângulo central correspondente. Muitos estudantes ficam em dúvida no momento de identificar o ângulo central correspondente ao ângulo de medida x. Quando podemos dizer que o ângulo central correspondente é aquele cujo arco está "dentro" do ângulo inscrito (o que é possível por ser uma região plana), conseguimos melhorar o entendimento.

Superado esse ponto, podemos escrever:

$$2x = (2y - 70^o) = 360^o \text{ e concluir que } x + y = 215^o .$$

Uma solução mais criativa para esse problema é apresentada na figura a seguir:



Notando o quadrilátero inscrito $ABCE$ e lembrando que seus ângulos opostos são suplementares, temos:

$$x + (y - 35^o) = 180^o \text{ ou}$$
$$x + y = 215^o.$$

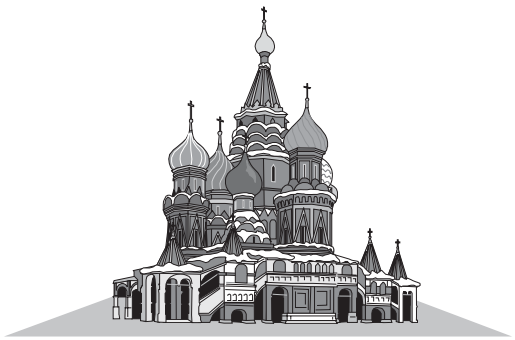
Nessa solução notamos, novamente, a dificuldade que muitos alunos têm em associar ao ângulo inscrito $D\hat{C}E$ o ângulo central correspondente, que tem medida 70^o, e obter assim a medida 35^o do ângulo $D\hat{C}E$. Vale repetir que o ângulo central é aquele cujo arco está "dentro" do ângulo inscrito.

Exemplo 2

Consideremos o estudo do cone circular reto na Geometria Métrica. É extremamente educativo nesse estudo produzir modelos dos sólidos. Nesse caso a planificação da superfície lateral do cone é um setor circular. Como devemos apresentar várias formas para o cone, é interessante construir um "chapéu chinês". A materialidade do ângulo côncavo aqui é, então, decisiva para o entendimento. Novamente temos a relevância do ângulo como região plana.

Trigonometria e um antigo problema de otimização

José Luiz Pastore Mello



Introdução

Apresentamos, neste artigo, um problema trigonométrico de maximização enunciado no século XV e uma sugestão de aplicação em sala de aula. As atividades descritas permitem que o professor trabalhe a trigonometria de forma menos técnica e mais contextualizada, de acordo com a recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino médio.

Regiomontanus e a trigonometria

A cidade de Köningsberg, na Prússia (atual Rússia), é conhecida na Matemática devido ao famoso problema das pontes, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Outro acontecimento importante que marca a vida da cidade, cujo nome significa Montanha do Rei, é o fato de ela ter sido o local de nascimento de Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como *Regiomontanus*, uma latinização do nome de sua cidade natal.

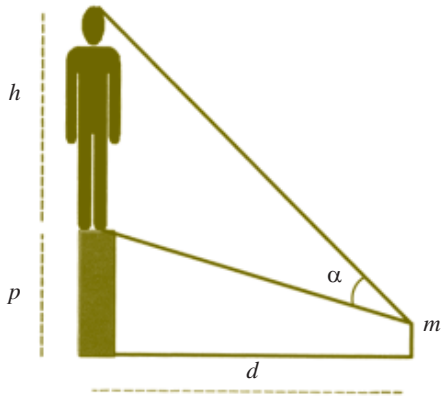
Regiomontanus realizou diversos estudos nas áreas de Astronomia, Geometria e Trigonometria. Em seu livro mais famoso, *De Triangulus Omnimodes,* escrito em 1464 e impresso apenas

em 1533, Regiomontanus apresenta uma visão moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas. É curioso notar que, mesmo tendo sido escrito antes do conceito de notação decimal, as tabelas trigonométricas contidas no livro não apresentam frações devido à utilização de um círculo e raio 100 000 000 de unidades, o que produzia apenas valores inteiros para as aproximações utilizadas.

A importância dos conhecimentos em Astronomia de Regiomontanus fez com que ele fosse convidado pelo Papa Sixto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais acurado do que o que vinha sendo usado pela Igreja. Após a realização do trabalho a gratidão do Papa foi tal, que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, Regiomontanus faleceu, tendo sido anunciada como causa de sua morte o flagelo de uma peste. Existem especulações de que ele tenha sido envenenado por alguma pessoa descontente com a alta influência de um "não-italiano" sobre o Papa e a Igreja romana. Alguns historiadores especulam ainda que, se não tivesse falecido tão cedo, talvez tivesse condições de realizar uma moderna compreensão do sistema solar, como a feita por Copérnico 100 anos depois.

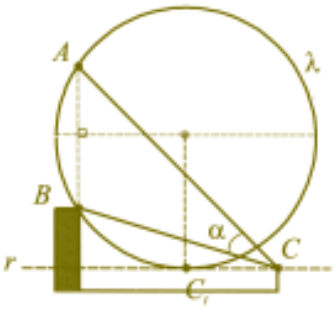
Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, destacamos um de 1471, como o primeiro problema de extremos encontrado na história da Matemática desde a antiguidade. O problema (**NR**) é o seguinte:

Suponha uma estátua de altura h *sobre um pedestal de altura* p. *Um homem de altura* m ($m < p$) *enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo a, que varia de acordo com a distância* d *entre o homem e a base do pedestal. Determinar* d *para que o ângulo de visão* α *seja o maior possível.*



Uma solução engenhosa para o problema

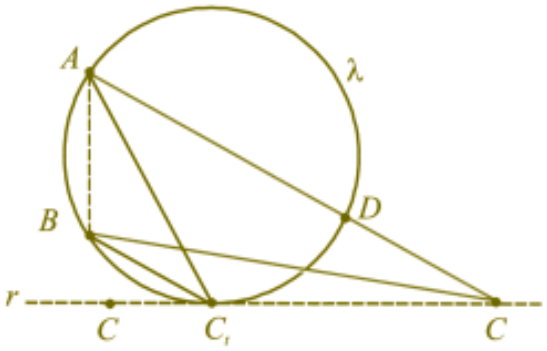
Apesar de o problema poder ser resolvido com as ferramentas do Cálculo, existe uma solução simples e engenhosa que apresentaremos a seguir.



Inicialmente marcamos na figura os pontos *A*, *B* e *C,* representando respectivamente o topo da estátua, o pé da estátua e os olhos do observador. Em seguida traçamos a reta *r* que passa por *C* e é paralela à linha do chão. Traçamos então a única circunferência λ, com centro na mediatriz do segmento *AB*, que passa pelos pontos *A* e *B* e tangencia a reta *r*. Marcamos, na figura, C_t como o ponto de tangência.

Se *C* percorrer livremente a reta *r*, qualquer possibilidade para o ângulo de visão α será dada por uma certa localização de *C* em *r*. Provaremos que α assume o maior valor possível quando *C* coincide com C_t. Para isso, mostraremos que medida é maior que medida para qualquer posição de *C* diferente de C_t.

Se *D* é o ponto de encontro da reta *AC* com a circunferência λ, temos



Por outro lado, no triângulo *BCD,* temos $\alpha + \lambda + 180^o - \beta = 180^o$. Logo $\beta = \alpha + \lambda$, implicando $\beta > \alpha$.

Uma vez verificado que AC_tB é o ângulo de máximo campo visual, determinaremos agora a distância d, entre observador e a base do pedestal, para que esse ângulo seja atingido.

Se Q é o ponto de interceção da reta AB com r, sendo as retas r e AB, respectivamente, tangente e secante a λ, aplicando potência no ponto Q, encontraremos a distância d procurada:

$$\overline{QC}_t^2 = \overline{QB} \cdot \overline{QA}$$

ou

$$d^2 = (p - m)(p - m + h).$$

Se a altura m do observador for pouco significativa em relação à altura da estátua e do pedestal, podemos simplificar a fórmula para $d = \sqrt{p(p + h)}$.

Uma aplicação

Em outubro de 1931, após cinco anos de construção, foi inaugurado no alto do morro do Corcovado o cartão de visitas do Rio de Janeiro, a estátua do Cristo Redentor. A altura total da estátua é 30 m, seu pedestal mede 8 m, e admitiremos um observador com 1,70 m de altura.

A que distância esse observador deve ficar da base do pedestal do Cristo Redentor para que o seu ângulo de visão seja o maior possível?

Usando a fórmula acima, obtemos:

$d = \sqrt{(8 - 1{,}7)(8 - 1{,}7 + 30)}$, o que resulta aproximadamente 15 m.

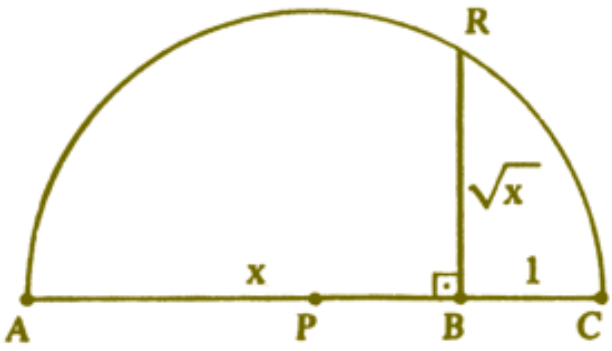
Método geométrico para o cálculo raiz quadrada

Francisco Rocha Fontes Neto

Seja X o número do qual queremos extrair a raiz quadrada. Numa reta, tomemos os pontos A, B e C tais que $AB = X$ e $BC = 1$.

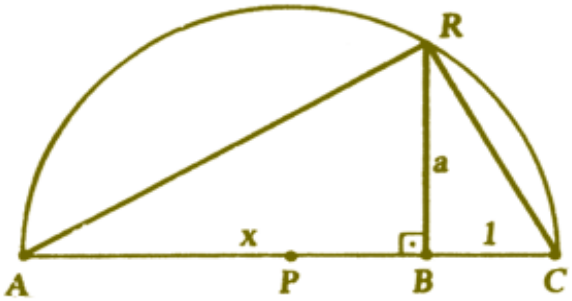
Seja P o ponto médio do segmento $AC (AP \equiv PC)$.

Com centro em P, tracemos um semi-círculo de raio AP e, por B, tracemos uma perpendicular à reta que contém AC até interceptar o semi-círculo, determinando assim o ponto R.



O segmento BR nada mais é do que a raiz quadrada do número X em questão.

Demonstração geométrica do método



Como o triângulo *ACR* é retângulo, temos que o produto das projeções dos catetos *AR* e *RC* sobre a hipotenusa *AC* é igual ao quadrado da altura *RB* relativa à hipotenusa, logo:

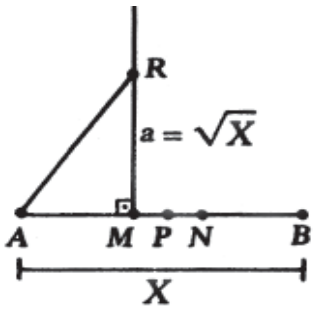
$$a^2 = X \cdot 1 \therefore \boxed{a = \sqrt{X}}$$

O processo seguinte usa somente o teorema de Pitágoras e é proposto pelo autor: seja $X > 1$; num segmento *AB* de comprimento *X* marquemos o ponto médio *P* e os pontos *M* e *N* tais que $MP = PN$ e $MN = 1$.

Por *M*, tracemos uma perpendicular à reta que contém *AB* e com centro no ponto *A* e abertura *AN* determinamos na perpendicular traçada por *M* o ponto *R*.

O segmento *RM* é a raiz quadrada de *X*.

Demonstração algébrica do método



AP = X/2
MN = 1
AM = (X - 1)/2
AR ≡ AN = (X + 1)/2
RM = a

Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{X-1}{2}\right)^2$

que desenvolvido dará $a = \sqrt{X}$

OBS.: Se $X < 1$, mudará apenas a figura. A forma da construção, entretanto, será mantida.

Como abrir um túnel se você sabe Geometria

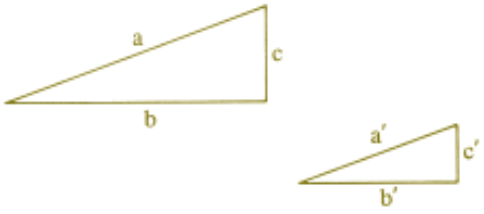
Euclides Rosa

A ilha de Samos, que ainda pertence à Grécia, fica a menos de 2 quilômetros da Costa da Turquia. Há 2.500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. Samos passou à História por ser a terra natal de Pitágoras, mas não é dele que vamos falar. O herói do nosso episódio nem ao menos era matemático. Seu nome era Eupalinos e, nos dias atuais, seria chamado de engenheiro. Ele será focalizado aqui por ter sabido usar, com bastante sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido pelos leitores da Revista do Professor de Matemática por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O teorema de Geometria usado por Eupalinos foi o seguinte:

Se *dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*



Na figura anterior, se $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ então

$$Ëab = Ëa'b' \text{ e } Ëac = Ëa'c'.$$

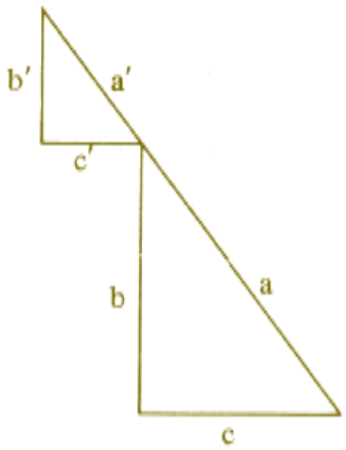
Como se sabe, este é um caso particular de semelhança de triângulos. [Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais.]

Para sermos exatos, Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim uma sua conseqüência imediata, que enunciaremos agora:

Sejam abc e a'b'c' triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.



A afirmação acima decorre imediatamente da anterior, pois, a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Retomemos nossa história. Ela se passa em Samos, ano 530 a.C. O poderoso tirano Polícrates se preocupava com o abastecimento de água da cidade. Havia fontes abundantes na ilha, mas ficavam do outro lado do monte Castro; o acesso a elas era muito difícil para os habitantes da cidade. Decidiu-se abrir um túnel. A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que chamaremos de *A* e *B* respectivamente. Cavar a montanha não seria árduo, pois a rocha era calcárea e não faltavam operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto *A* e, cavando, chegar ao ponto *B* sem se perder no caminho.

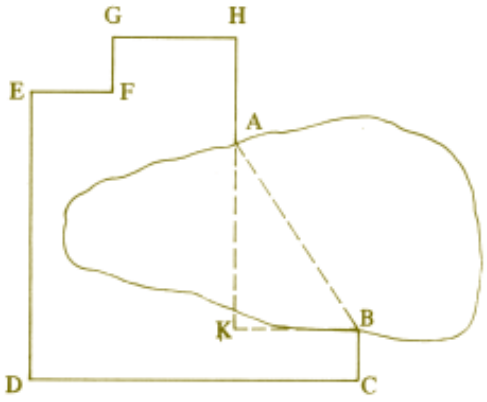
Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática. Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade, propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos *A* e *B*, encontrando-se as duas turmas no meio do túnel!

Disse e fez. O túnel, construído há 25 séculos, é mencionado pelo historiador grego Heródoto. Em 1882, arqueólogos alemães, escavando na ilha de Samos, o encontraram. Ele tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

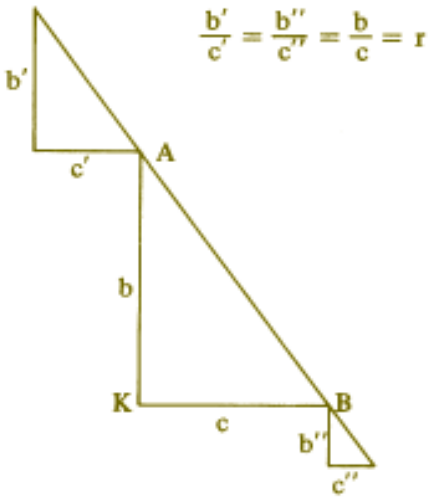
Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de *A* e *B*, traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, *A* é o ponto de entrada e *B* é a saída do túnel.

A partir do ponto *B* fixa-se uma direção arbitrária *BC* e, caminhando ao longo de uma poligonal *BCDEFGHA*, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto *A*, tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus.)



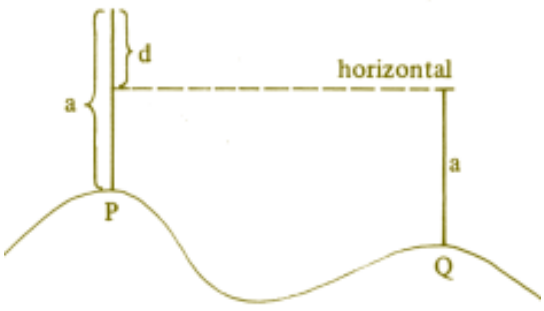
Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos *AK* e *KB* do triângulo retângulo *AKB* no qual *AB* é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada. Calcula-se então a razão $r = AK/KB$. A partir dos pontos *A* e *B*, constroem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão *r* entre os catetos do triângulo *AKB*.



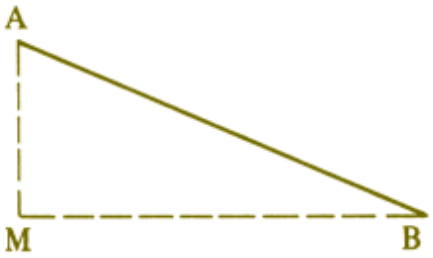
Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos *A* e *B*, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos.

Isto resolve o problema se os pontos *A* e *B* estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal, e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral, *A* e *B* não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que *B* seja mais baixo, e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular *d* = diferença de nível entre *A* e *B*. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal *BCDEFGHA*, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.



Tendo *d*, consideramos o triângulo retângulo *AMB*, no qual o cateto *AM* é vertical e tem comprimento *d.* O comprimento da hipotenusa *AB* se determina pelo teorema de Pitágoras (a partir dos catetos do triângulo *AKB*).



A razão $AM/AB = s$ diz como se deve controlar a inclinação da escavação: cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo do túnel, o nível deve baixar s unidades.

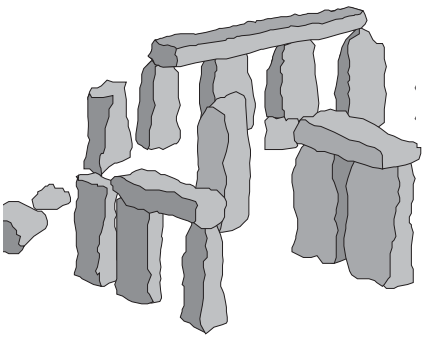
O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

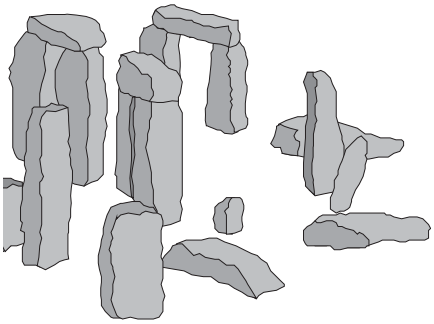
Honestamente, devemos esclarecer que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Isto seria esperar demais da precisão dos instrumentos então existentes. Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvios insignificantes convenhamos. Além disso, esse erro tem dois aspectos interessantes. Em primeiro lugar, constitui uma prova de que o túnel foi realmente cavado em duas frentes. Em segundo lugar, a ponta que começou em B chegou mais baixa do que a que começou em A, o que permitiu formar uma pequena cachoeira, sem interromper o fluxo de água de A para B. Isto nos deixa quase certos de que esse erro na vertical está ligado ao cuidado dos construtores em não deixar as pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que causaria um problema desagradável.

Para encerrar, uma pergunta: como sabemos destas coisas? Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes. Um desses livros é sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra. Nele, Heron descreve o processo que expusemos acima. Em seu todo, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, sintetizando o conhecimento da época. Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados anteriormente com propósitos semelhantes, e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas

Mania de Pitágoras

Euclides Rosa





Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e a organizou-as num livro, ao qual chamou *The Pythagorean Proposition* (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* daquele país.

O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos, porque a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, já é um caso particular daquele teorema.

Como sabemos, o enunciado do Teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Se a, b são as medidas dos catetos e c é a medida da hipotenusa, o enunciado acima equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios muito antes dos gregos co

nheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como

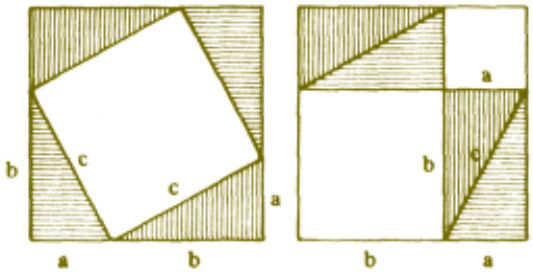
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e} \quad 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2.$$

O fato de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo era (e ainda é) útil aos agrimensores. Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O que parece certo, todavia, é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. Tudo indica que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo. (Ou alguém da sua Escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico naquele grupo era propriedade comum).

A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos *Elementos* de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo:



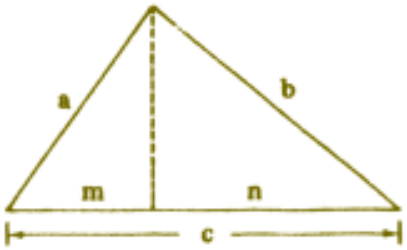
Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b, respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b.

Esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que têm algum interesse especial, por um motivo ou por outro. As quatro primeiras constam da lista do Professor Loomis.

A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: "Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela". Assim se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando, vem $a^2 + b^2 = c^2$.



O problema do relógio

António Leonardo P. Pastor

Resolução simplificada de um problema angular

Um resultado interessante que os alunos usam, e nem sempre sabem justificar, é o seguinte:

O ângulo que o ponteiro das horas de um relógio descreve em m minutos é igual a

$$\frac{m}{2} \text{ graus.}$$

Consideremos, por exemplo, o problema: Calcular o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 5 *h* 43 *mim*.

É usual resolvermos assim: Seja β o ângulo que o ponteiro das horas descreveu desde as 5 horas até 5 *h* 43 *min.* Ora, o mostrador do relógio é dividido em 12 partes iguais de 30° cada. Cada setor de 30° corresponde a 5 minutos e portanto cada minuto corresponde a 6º. Assim, o ângulo $a + \beta$ pode ser determinado por contagem direta, e é igual a $18 \cdot 6 = 108°$.

É fácil verificar que o ângulo β é diretamente proporcional ao número *m* de minutos transcorridos, isto é, $\beta = km$. Ora, sabemos que em uma hora o ângulo β descrito pelo ponteiro menor é igual a 30°. Então:

$$30 = k \,.\, 60 \Leftrightarrow k = \frac{30}{60} = 0{,}5 \ ,$$

o que mostra que a constante de proporcionalidade

entre as variáveis β e *m* é igual a $\frac{1}{2}$.

Geometria e Astronomia

Geraldo Ávila

1. Considerações preliminares

Freqüentemente, o professor de Matemática se vê em dificuldades diante do aluno que deseja saber "pra que serve" o que está aprendendo, ou porque está estudando este ou aquele tópico. Nem sempre o professor tem uma resposta satisfatória e às vezes até encerra o assunto com uma justificativa nada convincente: "Você precisa aprender isto agora como embasamento para o que vai estudar mais tarde".

Em situações como essa, quem tem razão é o aluno: sua curiosidade por uma justificativa adequada das coisas que lhe são ensinadas é mais do que natural. Ele precisa de respostas certas, que satisfaçam sua curiosidade e estimulem sua mente inquisitiva. Só assim poderá o professor transformar o desinteresse do aluno pela Matemática numa ativa participação no aprendizado.

A Astronomia, que é a mais antiga das ciências, oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, que muito bem respondem ao "pra que serve" do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da Matemática como instrumento da ciência aplicada. Escrevemos sobre algumas dessas questões no primeiro número da **RPM**, onde mostramos como noções simples de semelhança e proporcionalidade permitiram aos sábios da Antiguidade encontrarem métodos de calcular os tamanhos da Terra, do Sol e da Lua e as distâncias entre esses astros. Muitos desses cálculos são

acessíveis a alunos de 6ª e 7ª séries e servem como excelente motivação ao estudo de triângulos e círculos.

No presente artigo apresentaremos outros cálculos simples que nos dão os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias ao Sol em termos da distância da Terra ao Sol, cálculos esses que são devidos, originariamente, a Copérnico.

2. O que fez Copérnico

A famosa obra de Nicolau Copérnico (1473-1543) sobre a teoria heliocêntrica do sistema solar foi publicada no ano de sua própria morte. Mas não teve repercussão imediata, embora se revelasse mais tarde como o impulso inicial mais importante para o desenvolvimento científico que persiste até os dias de hoje. Por isso mesmo historiadores da ciência adotam o ano de 1543 como o do início da ciência moderna.

Essa idéia de que o Sol está fixo no espaço e os planetas, inclusive a Terra, giram em torno dele, não era nova no tempo de Copérnico. Ela já havia sido proposta por Aristarco no 3º século a.C, mas não vingou, porque esbarrava em sérias dificuldades – uma das quais é uma objeção muito interessante, aparentemente levantada pela primeira vez por Hiparco, que viveu por volta de 150 a.C. Se a Terra girasse em torno do Sol – dizia Hiparco – a direção em que vemos uma estrela particular deveria variar durante o ano (Figura 1). E Hiparco, um eminente astrônomo, nunca constatara esse fenômeno em suas observações.

Figura 1

Para bem entender do que estamos falando, imagine um observador olhando fixamente para frente, movimentando a cabeça para a direita e para a esquerda. Ele notará que os objetos diante de si também se movimentam para a esquerda e para direita respectivamente. Os objetos, quanto mais afastados estiverem do observador, menos "se deslocam". Pois bem, era exatamente

esse deslocamento que Hiparco esperava das estrelas, se é que a Terra estivesse mesmo dando voltas em torno do Sol. Ao que parece, Hiparco descartava como absurda a idéia de que as estrelas estivessem tão afastadas de nós a ponto de permanecerem praticamente fixas na abóbada celeste.

Hoje sabemos que as estrelas efetivamente "se deslocam" ao longo do ano, mas por ângulos ínfimos que sempre escaparam à capacidade de detecção dos instrumentos de Hiparco e de todos os astrônomos até muito recentemente. De fato, esse deslocamento das estrelas, chamado *paralaxe,* só foi medido pela primeira vez pelo astrônomo russo Struve em 1837 e pelo alemão Bessel em 1838. Essas descobertas mostraram que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós, umas mais longe, outras mais perto. A estrela mais próxima é a Alfa Centauro, que é a segunda estrela mais brilhante à esquerda do Cruzeiro do Sul (Figura 2). Ela é, na verdade, um sistema triplo, isto é, são três estrelas agrupadas, das quais a mais próxima de nós está a 4,3 anos-luz* de distância. Ora, o Sol está a 8,3 minutos-luz da Terra, de sorte que

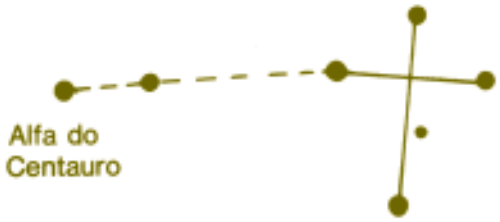


Figura 2

$$\frac{4{,}3 \text{ anos} - \text{luz}}{8{,}3 \text{ minutos} - \text{luz}} = \cdot$$

$$= \frac{4{,}3 \times 365 \times 24 \times 60}{8{,}3} = 272\,000$$

Isto mostra que essa estrela está distante de nós 272 000 vezes mais que o Sol. Assim, se o Sol estivesse a 1 metro de distância da Terra, a estrela mais próxima estaria a 272 km de distância! E Copérnico pensava que as estrelas estivessem 400 vezes mais longe de nós que o Sol...

Se a idéia heliocêntrica já havia ocorrido a Aristarco – chamado "o Copérnico da Antiguidade" – por que então a fama ficou com Copérnico? A explicação é simples: não basta uma hipótese, é preciso elaborar um sistema, construir uma teoria. Das idéias de Aristarco só nos chegaram uma breve referência num dos livros de Arquimedes. Copérnico, por outro lado, deixou-nos um livro – *Sobre as revoluções das esferas celestes* – con

* Um *ano-luz* é a distância percorrida pela luz em um ano.

tendo um estudo que compatibiliza suas idéias com os dados de observação acumulados ao longo de milênios. E nesse arranjo de compatibilização ele teve de introduzir várias modificações em sua idéia original.

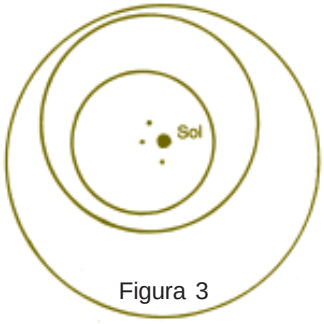


Figura 3

Assim, por exemplo, embora o Sol seja considerado fixo, ele não ocupa os centros das órbitas dos planetas, nem esses centros são coincidentes (Figura 3). Isso foi necessário porque Copérnico mantinha a idéia de que os planetas eram dotados de velocidade uniforme em suas órbitas, o que não condizia com os dados de observação, se as órbitas fossem concêntricas.

Veremos, a seguir, como Copérnico calculou os períodos de revolução do planetas e suas distâncias ao Sol, admitindo órbitas circulares centradas no Sol e movimentos uniformes dos planetas em suas órbitas.

3. Período sideral e período sinódico

Consideremos o planeta Marte, que é um planeta superior, isto é, *cuja* órbita abarca a órbita da Terra. Sejam *T* e *M* as posições da Terra e de Marte, respectivamente, quando ambos se encontram de um mesmo lado do Sol S e com ele alinhados (Figura 4). Nesse caso, diz-se que Marte está em *oposição* (ao Sol relativamente à Terra). Quando isso acontece, Marte é visto no zênite à meia-noite; ele nasce quando o Sol se põe e se põe ao nascer do Sol. Por observações feitas, desde a Antiguidade, sabe-se que Marte volta a ficar em oposição a cada 780 dias. Esse é o período de revolução do planeta em torno da Terra, chamado *período sinódico.* O período de revolução do planeta em torno do Sol é chamado *período sideral.*

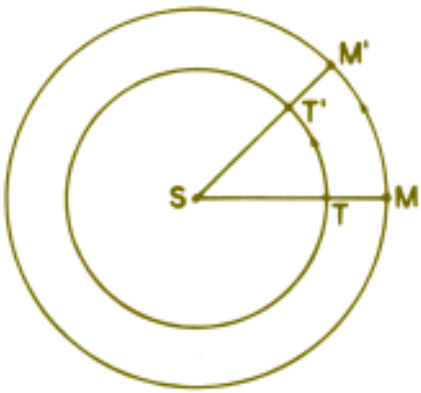


Figura 4

Para calcularmos esse último período, observemos primeiro que a velocidade angular de Marte é menor que a da Terra – um fato que se constata por observações simples. Então, a partir de uma oposição, a Terra vai ganhando dianteira sobre Marte e esse planeta voltará a ficar novamente em oposição quando a dianteira da Terra sobre ele for de 360°, isto é, uma volta completa. Ora, em 780 dias, que é o tempo que decorre entre duas oposições sucessivas, a Terra terá dado duas voltas em torno do Sol e se deslocado ainda, ao longo de um arco $\overset{\frown}{TT'}$ (Figura 4), durante os 50, dias restantes (pois $780 = 2 \times 365 + 50$) Devido à uniformidade do movimento da Terra, teremos a proporção:

$$\frac{\overset{\frown}{TT'}}{50} = \frac{360}{365} \quad TT' = 49^\circ$$

Durante os mesmos 780 dias, Marte completou uma volta em torno do Sol mais o arco $\overset{\frown}{MM'} = \overset{\frown}{TT} = 49^o$. Então, se P é o período sideral de Marte teremos a proporção:

$$\frac{P}{360} = \frac{780}{360 + 49} \quad \therefore P \approx 687 \text{ dias}$$

Com esse mesmo raciocínio, Copérnico calculou os períodos siderais dos demais planetas superiores conhecidos em seu tempo, Júpiter e Saturno. Sugerimos que o leitor faça esses cálculos, sabendo que os períodos sinódicos desses planetas são 399 dias e 378 dias, respectivamente. Os períodos siderais correspondentes serão, aproximadamente, 11,8 anos e 29,5 anos, respectivamente.

Um raciocínio parecido permite calcular os períodos siderais dos planetas inferiores, o que faremos no Apêndice adiante.

4. Distância de Marte ao Sol

O conhecimento do período sideral de um planeta superior é essencial para o cálculo de sua distância ao Sol, como veremos agora, no caso de Marte. Imaginemos, como ilustra a Figura 5, que Marte em M esteja em oposição, em a Terra estando em T e o Sol em S. Sabemos, por dados de observação, que 106 dias após, a Terra e Marte se encontrarão em posições 7" e M', respectivamente, tais que $\widehat{ST'M'} = 90^o$. Durante esse tempo, o ângulo α, descrito pela Terra, é de aproximadamente

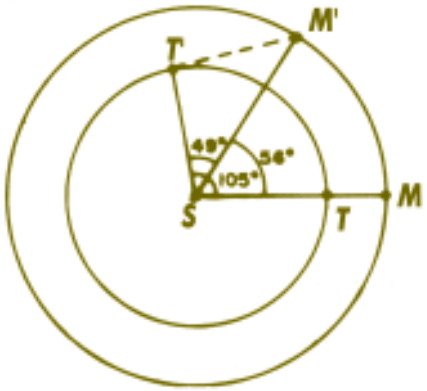


Figura 5

105°, como é fácil calcular (pois α: 106 = 360° : 365). Quanto a Marte, ele terá descrito um ângulo $\beta \approx 56^{o}$, pois

$$\frac{\beta}{106} = \frac{360^{\circ}}{687}$$

Como conseqüência, $\widehat{T'SM'} = 105 - 56 = 49^{o}$. Finalmente, o triângulo retângulo $ST'M'$ nos dá:

$$SM' = \frac{ST'}{\cos 49^{\circ}} \approx \frac{ST'}{0{,}65606} \approx 1{,}5\ ST'$$

Fica assim calculada a distância de Marte ao Sol como 1,5 vezes a distância da Terra ao Sol.

Com o mesmo raciocínio Copérnico calculou as distâncias de Júpiter e Saturno ao Sol. Notamos, mais uma vez, que os cálculos dessas distâncias dependem do conhecimento dos períodos siderais dos planetas, os quais são conceitos ligados à hipótese heliocêntrica de Copérnico. Essas distâncias, portanto, só podiam ser calculadas por Copérnico ou pelos sábios que vieram depois. Pode ser que Aristarco as tenha calculado na Antiguidade, mas disso nada sabemos, porque muitos dos seus escritos não chegaram até nós.

5. As distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol

Contrariamente ao que se passa com os planetas superiores, Marte, Júpiter e Saturno, o cálculo das distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol é muito simples e não depende do conhecimento de seus períodos siderais. Estes são os *planetas inferiores,* assim chamados porque suas órbitas são abarcadas pela órbita da Terra (Figura 6). Em conseqüência, o afastamento angular desses planetas em relação ao Sol, dado pelo ângulo $\widehat{STP}$ e chamado *elongação* do planeta *P,* nunca ultrapassa um certo valor máximo, inferior a 90°. É por isso que Mercúrio e Vênus nunca são visíveis no zênite, por onde eles só podem passar durante o dia. Eles são visíveis ao romper da manhã ou ao cair da noite, já que nunca se afastam muito do Sol.

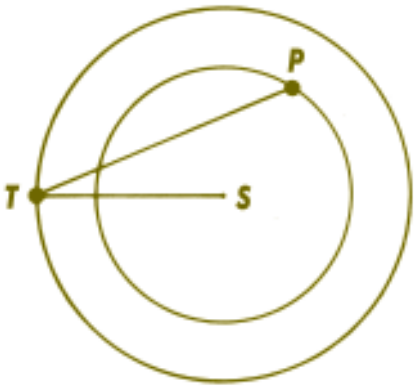


Figura 6

Esses dois planetas se situam em extremos opostos, no que diz respeito à visibilidade: Vênus é muito fácil de ser visto, seja como "estrela matutina" ou "estrela vespertina"; ele é o astro mais conspícuo e mais brilhante no céu, depois do Sol e da Lua. Mercúrio é diferente: estando muito perto do Sol, não é fácil localizá-lo, já que só será visto quase ao raiar do Sol, ou pouco depois do Sol poente, de preferência quando em elongação máxima, que

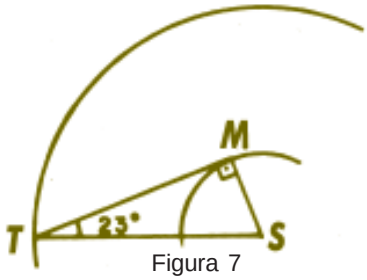


Figura 7

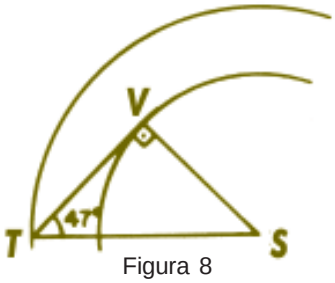


Figura 8

é, em média, de 23°. Quando isso acontece (Figura 7) o triângulo *STM* é retângulo em *M*, logo,

$$SM = ST \cdot \text{sen } 23° \approx 0{,}39\ ST.$$

Vemos assim que Mercúrio dista do Sol 0,39 vezes a distância da Terra ao Sol.

O planeta Vênus, por sua vez, tem elongação que atinge valor máximo de 47°. Portanto, sua distância ao Sol é (Figura 8)

$$SV = ST \cdot \text{sen } 47° \approx 0{,}73\ ST.$$

6. Conclusão

Os cálculos aqui apresentados são uma pequena amostra do trabalho de Copérnico na elaboração de sua teoria heliocêntrica. Usar a teoria para fazer previsões sobre o movimento dos planetas e comparar essas previsões com o que

revelavam os dados da observação era o teste necessário para comprovar ou refutar a teoria. Esse teste foi revelando discrepâncias inaceitáveis e exigindo ajustes nas hipóteses. Já mencionamos um desses ajustes, que foi o de deslocar o Sol dos centros das órbitas dos planetas. Mas as modificações, ainda nas mãos de Copérnico, não pararam aí. As mais espetaculares mudanças viriam com Kepler, cerca de 70 anos após a morte de Copérnico. Só então emergiria uma teoria definitiva do sistema solar e que iria encontrar forma acabada na teoria da gravitação de Newton. Pretendemos falar sobre isso num futuro artigo.

Apêndice

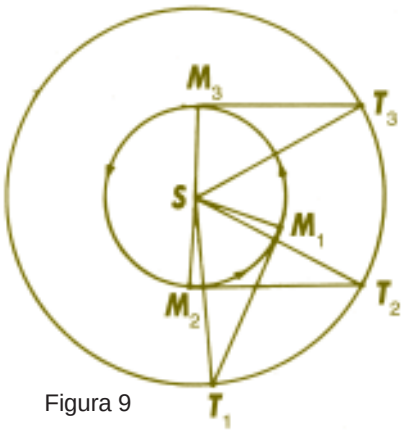


Figura 9

Mostraremos, aqui, como se pode calcular o período sideral de um planeta inferior como Mercúrio. Imaginemos o planeta em elongação máxima a oeste, na posição *M,* quando a Terra se encontra em T_1 (Figura 9). Sabemos, por dados de observação, que dali a 58 dias ele estará novamente em elongação máxima, desta vez ao leste, na posição M_2. Nesses 58 dias a Terra terá coberto um arco terá coberto um arco $\widehat{T_1T_2} = 57$ como é fácil calcular. Mais 58 dias e voltaremos a ver Mercúrio em elongação máxima a oeste, na posição M_3, com a Terra em T_3. Assim, em 116 dias (58 + 58) a Terra descreverá o arco $\widehat{T_1T_3} = 2 \times 57^o = 114^o$; e Mércurio descreverá uma volta completa em torno do Sol, mais o arco $\widehat{M_1M_3} = \widehat{T_1T_3} = 114^o$, um total de 474^o. Se P é o período sideral de Mércurio, teremos:

$$\frac{P}{360} = \frac{116}{474} \therefore P \approx 88 \text{ dias.}$$

O procedimento é análogo para Vênus, que tem um período sideral de 225 dias.