MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

EXPLORANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA

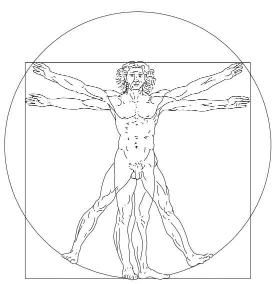
ARTIGOS

VOLUME I

BRASÍLIA
2004

APRESENTAÇÃO

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos "lendo" na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. É quase impossível abrir uma página de jornal cuja compreensão não requeira um certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem que lhe é própria: porcentagens, gráficos ou tabelas são necessários na descrição e na análise de vários assuntos. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Um médico que interpreta um eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático; ao dar um diagnóstico, está utilizando o raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística. Um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcihos na época dos faraós. Uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.



Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Para isso, é importante compartilhar experiências que já foram testadas na prática e é essencial que o professor tenha acesso a textos de leitura acessível que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos.

APRESENTAÇÃO

Inserir o conteúdo num contexto mais amplo provocando a curiosidade do aluno ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através de uma real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. Não se trata, é claro, de repetir um caminho que a humanidade levou séculos para percorrer. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para a tentativa e erro é importante para desenvolver alguma familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. Da mesma forma que é possível ler um texto, palavra após palavra, sem compreender seu conteúdo, é também possível aprender algumas "regrinhas" e utilizar a Matemática de forma automática.

Com o objetivo de ajudar o professor nos vários campos apontados acima, reunimos uma coletânea de artigos extraídos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.

O material aqui apresentado sugere abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e apresenta uma variedade de situações cotidianas em que a matemática se faz presente. Ao mesmo tempo, explora, em cada caso, o conteúdo de forma rigorosa e sistemática, levanta problemas e indica soluções e, nesse processo, expõe os meandros do raciocínio matemático.

Os textos escolhidos estão distribuídos em dois volumes e abordam conteúdos curriculares da 5ª à 8ª série do ensino fundamental.

No primeiro volume incluímos artigos que tratam de História, Geografia, Astronomia, situações do cotidiano, cultura geral, crônicas e problemas. Enfim, muito do que possa fornecer situações com modelagem matemática, ligando a Matemática ao desenvolvimento do conhecimento humano de diversas áreas, foi aqui reunido. Os artigos possibilitam que o professor amplie sua visão e insira os conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar, de modo que possam ser utilizados para desenvolver atividades interessantes junto aos estudantes explorando novas perspectivas e permitindo um outro olhar.

No segundo volume, são sugeridas atividades em sala de aula utilizando materiais de fácil acesso (canudos, cartolina, jornal, barbante, etc.) ou explorando situações do cotidiano onde a matemática está presente. A atividade lúdica está sempre ligada a conteúdos matemáticos que são explorados e aprofundados.

O professor e educador George Polya (1887-1985), autor do livro *A arte de resolver problemas* , afirmava, muito adequadamente, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela. Com estes dois volumes esperamos compartilhar com nossos colegas professores experiências bem sucedidas em sala de aula e, sobretudo, esperamos compartilhar um pouco da beleza e da riqueza da Matemática.

É com grande entusiasmo que a Secretaria de Educação Infantil e Fundamental realiza este projeto, agradecendo a participação da comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

VOLUME 1

ARTIGOS

Introdução

Neste volume apresentamos artigos – cuja leitura leva a aprofundar o conhecimento do professor – que podem ser utilizados em sala de aula, quer por meio de atividades elaboradas pelo professor, quer como incentivo a reflexões sobre os temas abordados.

Há artigos sobre história da Matemática, que mostram o desenvolvimento do pensamento matemático, e há os que podem ser relacionados com a história do Brasil, como *Medidas na carta de Caminha. As pirâmides do Egito e a razão áurea*, *Geometria e Astronomia, Uma aula de Matemática no ano 1000*, por exemplo, vinculam a Matemática à história do conhecimento da humanidade. A Geografia está contemplada em O *centro geográfico do Brasil*, entre outros.

Há um grande número de crônicas, entre as quais *Sargú e a arte de calcular na areia*, *O menino,* que, além de proporcionarem leitura agradável, colocam problemas e apresentam curiosidades matemáticas.

Situações do cotidiano são resolvidas matematicamente em alguns artigos, tais como: *Ano bissexto*, *A mídia e a Mega-Sena acumulada, Como abrir um túnel se você sabe Geometria*.

Há também os artigos que abordam temas de cultura geral, que explicam certos procedimentos ou conteúdos matemáticos, exploram novas perspectivas, propiciando outras interpretações. De um modo geral, os textos aqui relacionados possibilitam ao professor ampliar sua visão e inserir conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar.

ÍNDICE

Capítulo 1

Crônicas

Sargu e a arte de calcular na areia

Alejandra Soto Ferrari

Numa terra muito distante, no Oriente, vivia um jovem de grandes ideais e muitos sonhos que trabalhava desde o amanhecer, cultivando a terra. Almejava sem descanso que seu destino mudasse; desejava ter a coragem e a sorte daqueles incansáveis viajantes que percorriam terras longínquas pelos confins do universo, apreciando novos pratos e aromas e admirando cores e perfumes jamais imaginados.

O nome desse rapaz era *Sargu*, conhecido como “o obstinado” devido a sua incansável disposição de mudar seu destino. Era filho de camponeses e tinha apenas 16 anos. Apesar dos grandes esforços dos pais para que se dedicasse à terra, como eles, *Sargu*, sempre que podia, escapava de seus trabalhos no campo e subia ao alto de um morro, onde deixava a imaginação voar; olhava o horizonte tentando ver tudo que lhe era proibido.

Todos os dias eram iguais para *Sargu*; terminava sua jornada e se punha a sonhar, esperando algum acontecimento que mudasse sua vida, ansiando por deixar de arar a terra e ir em busca das aventuras que, mais de uma vez, ouviu dos mercadores que chegavam a seu povoado.

Em um dourado entardecer, *Sargu*, absorto em seus sonhos, avistou ao longe as figuras de vários homens e animais. À medida que o grupo se aproximava, as imagens se tornavam mais claras e eram tantos camelos e asnos, que não poderia dizer quantos. Viu muitos e logo começou a fazer linhas e outros sinais na areia para registrar em algum lugar o que via. Fez tantas marcas que não podia acreditar; sem dúvida o senhor que vinha em um dos camelos, no início da caravana, era um homem rico.

Eram por volta de cem camelos e asnos carregados com todo tipo de especiarias, tecidos e vasilhas, propriedade de um rico mercador apelidado de *Mestre*, cujo verdadeiro nome era *Fargot.* Era um homem de aproximadamente 50 anos, de poucas palavras e poucos amigos, de voz áspera e olhar penetrante. Sua pele estava endurecida pelo sol e pela areia e, apesar de sua riqueza, era um homem de modos e gostos simples.

Viajava acompanhado da família, constituída por três esposas, vários filhos e sua mais preciosa jóia, sua filha *Tesia,* de 15 anos, além de muitos empregados que o serviam e viviam sob sua proteção.

A caravana, que nunca tinha sido tão numerosa, passava ano após ano pelas terras onde morava *Sargu*, estabelecendo-se na margem do rio e oferecendo suas mercadorias aos habitantes das aldeias próximas.

Quando *Sargu* notou *Tesia* entre a multidão, ficou cativado pela beleza e encanto daquela donzela de grandes olhos amendoados e soube que finalmente havia chegado o momento pelo qual tanto esperara. Era hora de empreender o vôo, de conhecer terras desconhecidas, lugares nos quais só poucos haviam estado, mistérios que ninguém havia imaginado; era hora de aceitar o convite que a cada tarde lhe fazia o horizonte. *Tesia* precisava conhecê-lo, e conquistá-la seria seu grande feito. Andou incansavelmente pela feira que havia sido instalada no local, observando com grande interesse as mercadorias dos comerciantes, e permaneceu horas tentando ver alguma transação. Todas elas eram realizadas pelo *Mestre*.

Cada vez que se fazia uma venda importante, chamavam-no e ele tirava uma bolsa de pano que guardava sob as roupas e, pondo-se de joelhos, fazia com grande rapidez sulcos na areia, nos quais colocava pequenas bolinhas de metal. Logo dizia as quantias finais, ante a perplexidade de todos os que o observavam. Geralmente, os compradores e seus ajudantes utilizavam cordas com nós, sementes ou pequenos pedaços de madeira para fazer as contas, mas ninguém superava a exatidão e rapidez do *Mestre*.

Quando *Sargu* notou o que *Fargot* fazia, ficou maravilhado: achou que ele era um mago ou um bruxo e se propôs a aprender com o *Mestre*, mesmo que isso implicasse ter que deixar os seus familiares para se unir à caravana.

No dia em que se desfez a feira e o grupo se dispôs a partir, *Sargu* implorou ao *Mestre* que o levasse, que lhe ensinasse sua magia, e prometeu trabalhar só por leito e comida. *Fargot*, comovido com tamanha insistência, relutou por um momento, dado o modo como o rapaz olhava para sua querida filha; entretanto, algo nesse moço o fazia sentir como se olhasse para si próprio, e assim, mais tarde, permitiu que ele se juntasse à caravana; porém lhe disse: “Minha arte não é magia e tampouco sou mestre, como me chamam por aqui, portanto não posso ensinar-lhe, só posso dizer que me observe e aprenda: conte os dedos das mãos, uma, duas vezes e vá sempre na direção do seu coração”.

E, assim, *Sargu* se uniu ao grupo e foi rapidamente aceito por todos, graças a sua tão particular maneira de pensar e seu espírito solidário. Logo tratou de se aproximar de *Tesia*, estabelecendo-se entre eles uma bela amizade, que não demorou a se transformar em verdadeiro amor.

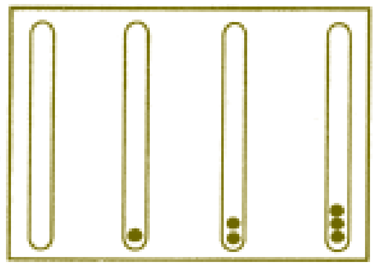
Sargu temia que o *Mestre* o expulsasse da caravana por sua origem humilde e logo se propôs, com determinação, ser digno do amor de *Tesia*. Enquanto a caravana percorria diversas regiões, transcorreu bastante tempo, e todas as noites em que demorava para conciliar o sono *Sargu*, como se estivesse jogando, fazia sulcos na areia, nos quais colocava pedrinhas arredondadas, imitando os gestos de *Fargot.*

Uma noite, cansado de não entender, relembrou uma conta feita pelo *Mestre* e conseguiu contar como ele: 123 camelos e 52 asnos, que eram a totalidade de animais que possuíam. Por fim havia entendido: o que *Fargot* fazia era decompor as cifras sobre os sulcos na areia mediante as bolinhas. Primeiro contava, depois decompunha e finalmente somava. Mas como fazia isso?

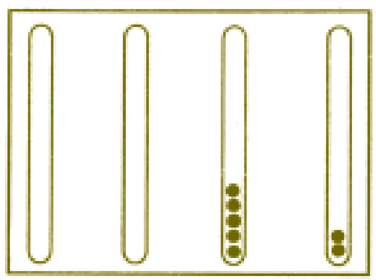
Sargu percebeu que contar até dez era muito importante, daí o *Mestre* ter-lhe dito para contar os dedos de ambas as mãos. Em cada sulco havia, de um modo especial, um 10 implícito. Então se lembrou das outras palavras do *Mestre*: “vá sempre na direção do seu coração” e as repetiu uma e outras vezes, até que, em um segundo – *zás* –, descobriu: tratava-se de contar da direita para a esquerda!

Desse modo, *Sargu* conseguiu montar o seguinte esquema na areia: tinha 123 risquinhos que representavam a quantidade de camelos; ele os agrupou de 10 em 10, fazendo um círculo em cada grupo, formando assim 12 grupos e sobraram 3 riscos sem agrupar. Então fez um círculo maior que continha os 10 primeiros grupos e assim sobraram 2 grupos de 10 risquinhos, mais os 3 riscos avulsos.

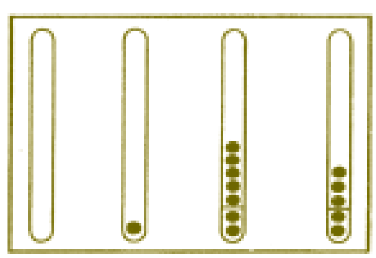
Os 3 riscos avulsos foram representados por 3 pedrinhas colocadas no primeiro sulco, à direita do grupo de sulcos que havia previamente feito na areia. Os 2 grupos de 10 riscos foram representados por 2 pedrinhas, colocadas no sulco seguinte, à esquerda do anterior, e finalmente ele pôs 1 pedrinha à esquerda de todas as anteriores, em representação do grupo maior, de 10 grupos de 10 riscos cada um. Desse modo obteve o seguinte sobre os sulcos:



Fez o mesmo para contar os asnos e obteve o seguinte:



O *Mestre* normalmente utilizava 3 grupos ou mais de sulcos, dependendo do tamanho da soma, e usava um sulco independente para os resultados. Desse modo *Sargu* transportou todas as bolinhas para um terceiro conjunto de sulcos e obteve:



Sargu estava simplesmente eufórico. Havia descoberto o grande mistério do *Mestre* e poderia ser um sábio, como tanto almejara, e então ser digno do amor de *Tesia*. Praticou muitas vezes até que lhe pareceu um jogo. Começou a não precisar de tantos sulcos e logo chegou a fazer as contas em um só grupo, no qual ele diferenciava as quantidades usando pequenos pedaços de madeira para separá-las.

Um dia o *Mestre* caiu enfermo de um estranho mal, suas pernas não respondiam, e a caravana precisou permanecer longos meses parada no deserto, nas proximidades de um pequeno riacho. Reinou a fome e a desolação e as vendas caíram consideravelmente devido ao isolamento do grupo. Por necessidade, venderam muitos camelos e asnos a um preço bastante baixo.

A comida e o gado ficaram cada vez mais escassos e as barras cunhadas de prata, poupadas em épocas melhores, desapareceram por completo ao serem trocadas por mercadorias de primeira necessidade nas aldeias vizinhas.

Foi então que passou pelo acampamento um conhecido estelionatário, que chamavam de *O Príncipe Negro*, e seu bando de agiotas, vindos da cidade de *Nínive.* Esse homem e seu séquito souberam da desventura da caravana do *Mestre* e viram no desolado grupo a possibilidade de um grande negócio, no qual ganhariam muito.

O *Príncipe Negro* ofereceu uma quantidade tentadora de barras de prata pela compra de algumas especiarias e tecidos e da maior parte dos camelos e asnos que sobraram, além de um grande dote para levar consigo a belíssima *Tesia.*

O débil *Fargot* não tinha forças para se pôr em pé, nem mesmo para ajoelhar-se para comprovar as contas do que deveria receber. Foi então que *Sargu* interferiu habilmente, entregando ao *Mestre*, em seu leito, uma tábua de argila na qual havia talhado vários sulcos verticais paralelos, que imitavam perfeitamente os sulcos na areia. *Sargu* explicou ao *Mestre*, com todos os detalhes, o tremendo logro a que se exporia se aceitasse o negócio proposto pelo *Príncipe Negro.*

Fargot ficou perplexo diante da exatidão das contas e da habilidade e perícia do rapaz para fazê-las, de modo que muito satisfeito e agradecido não aceitou o negócio, e os malfeitores fugiram sem deixar rastros.

O *Mestre* abençoou *Sargu* e lhe disse:

– Agora sou eu quem lhe pede para ficar e ensinar a mim e aos meus o que aprendeu. Tenho sido muito egoísta em querer que ninguém mais saiba sobre a arte de contar na areia. Com o seu invento poderei fazer as contas mesmo no meu leito. Você aperfeiçoou minha arte e é melhor que eu. Peça o que quiser, você é um obstinado muito inteligente.

Sargu, emocionado, pensou por alguns instantes e respondeu:

– Quero ficar ao seu lado para sempre, ser seu sócio e amigo. Além disso quero a mão de sua filha para que me abençoe com sua descendência e, acima de tudo, quero ser um mestre e ensinar pelo mundo a arte de calcular.

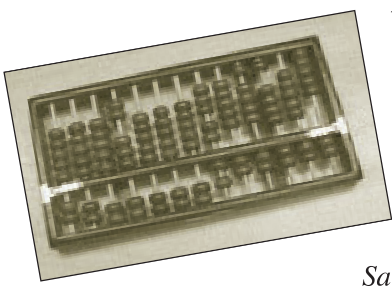
Fargot atendeu aos desejos do rapaz, mas bem no fundo de seu coração sentia que seu fim se aproximava. Como sua enfermidade o consumia lentamente, deixou seu destino e o dos seus nas mãos do rapaz, permitindo que se festejasse o casamento entre ele e sua filha.

Graças a *Sargu* puderam continuar sendo os prósperos e ricos mercadores de sempre, só que agora levavam uma escola errante, aberta a todos que quisessem aprender a contar no ábaco, nome que se deu ao sistema utilizado por sulcos e bolinhas sobre a areia.

Sargu era o *Grande Mestre*, ensinava incansavelmente e repetia:

– Cada bolinha no primeiro sulco à direita corresponde a uma unidade; cada bolinha no segundo sulco, indo para a esquerda, significa 10 *unidades; cada bolinha no terceiro sulco corresponde a* 10 *unidades de* 10*, isto é,* 100 *unidades, e assim sucessivamente. Recordem: Para somar ou subtrair dois números, diferenciamo-los separando-os por pedacinhos de madeira ou outro material similar, mas nunca deve haver mais que 9 bolinhas em cada sulco.*

Por fim *Fargot* morreu e deixou todos os seus bens para *Sargu*. *Fargot* cuidou para que nada faltasse às suas mulheres e aos seus adorados filhos e descendentes. Suas últimas palavras expressaram seu desejo de que a escola errante jamais se detivesse e que seus ensinamentos atingissem os confins do Universo, sem distinção de nenhum tipo, nem social nem racial.



É por isso que *Sargu* decidiu destinar o resto de sua existência à difusão e ao aperfeiçoamento do ábaco, que foi evoluindo, pouco a pouco, ao passar pelas diferentes culturas e civilizações do Oriente e do Ocidente. Porém, em essência, o ábaco permanece o mesmo, e graças a ele se deu um importante passo em Matemática, conhecido como a *notação com valor posicional* (o valor de uma bolinha depende do lugar ou sulco que ocupa).

Sargu percorreu os lugares mais incríveis com seu invento, visitou a China e a Índia, entre outros lugares da Ásia, onde, dizem, se aperfeiçoou ainda mais na arte do ábaco. Desenhou-se um ábaco com bolinhas sobre eixos fixos, que, além de ser mais cômodo, uma vez que evitava o constante cair das bolinhas, facilitou as operações com quantidades maiores.

Temos informação de sua existência no Oriente só a partir do século XIII d.C., de onde, supõe-se, teria passado ao Japão com outras modificações.

O ábaco que *Sargu* difundiu se firmou fortemente na *Mesopotâmia* devido à complexidade de sua escrita, repleta, particularmente na numeração, de símbolos incômodos e confusos.

Também se difundiu na maioria das terras civilizadas. O ábaco utilizado na Roma antiga era metálico, em geral de prata ou bronze, e era formado por dois conjuntos de sulcos paralelos, um sobre o outro. No conjunto dos sulcos inferiores havia 4 bolinhas em cada um, enquanto no conjunto dos superiores havia uma só bolinha. A bolinha do sulco superior representava 5 vezes a bolinha correspondente no sulco inferior. Assim o calculista podia representar qualquer número.

À direita do ábaco de metal havia um conjunto separado de sulcos utilizados para se trabalhar com frações, o que faz sentido, já que os romanos dividiam sua moeda em quartos.

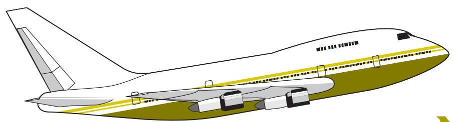
A palavra que os romanos usavam para denominar as bolinhas ou pedrinhas era *calculus*, do latim (quem não ouviu falar de cálculos renais?), da qual vem nossa palavra *calcular*.

Muito tempo depois, na época de *Cólon,* alguns comerciantes e donos de negócios do oeste da Europa ainda utilizavam tabuleiros de contas, que traziam algumas modificações em relação ao antigo funcionamento, mas obedeciam aos mesmos princípios do ábaco da antigüidade.

Os ábacos modernos, chineses, japoneses e russos, chamados respectivamente de *Swa Pan*, *Soroban* e *Scoty*, ainda funcionam com grande facilidade e rapidez nos seus países, embora seu uso esteja condenado a desaparecer, devido à utilização crescente das calculadoras.

O menino

Ledo Vaccaro Machado



Não havia saída. Teria que esperar por três horas o próximo vôo para Salvador. Arquiteto por formação e profissão, tinha que apresentar um projeto na manhã seguinte, numa cidade próxima à capital da Bahia. Assentei-me como pude. Teria que olhar para aquele relógio pendurado no teto por três horas. Como se não bastasse, o relógio registrava os segundos. Relógios que registram segundos demoram mais que os que não o fazem.

Alguns apelam para palavras cruzadas, outros giram os polegares e eu, como o vício do cachimbo entorta a boca, traço em folhas de papel as formas que se me apresentam no ambiente que é alcançado pelas retinas. Lápis e papel na mão, registrava dois lances de escada e uma escada rolante que surgiram a minha frente. Mal traçara as primeiras linhas, deparei-me com uma questão que me intrigou: quantos degraus deveria desenhar na escada rolante? Em vão, tentei contar os degraus visíveis. Se a escada parasse, poderia contá-los. Tive ímpetos de apertar o botão vermelho próximo ao corrimão, onde se lia "PARAR". Meu censurador não permitiu que o fizesse. Fiquei ali, inerte, com o cachimbo na mão e sem poder fumar.

Um menino sentou-se ao meu lado, brincando com uma bolha de sabão. Sem tirar os olhos da bolha, ela disse em voz clara e pausada:

– Pepino não parece "inreal"?

Olhei-o, ligeiramente, com o canto dos olhos e, sem nada dizer, retornei ao meu cachimbo

apagado. Alguns instantes depois, senti minha camisa ser puxada e escutei novamente:

– Pepino não parece “inreal”?

Dessa vez, com uma mão segurando a bolha e com a outra puxando a minha camisa, ele me olhava firmemente.

– Não é “inreal”, é irreal.

– Pois é, não parece?

Aquela insistência irritou-me. Eu, diante do mais intrincado problema da existência humana – quantos degraus ficam visíveis quando a escada rolante pára – e aquele menino me questionando sobre a realidade de um pepino! Tentando dissuadi-lo, resolvi apresentar-lhe a complexidade do problema que me afligia.

– Olha, menino, estou tentando desenhar aquelas escadas e não sei como acabar o desenho da escada rolante. Quantos degraus devo desenhar? Meu desenho está parado e a escada está subindo. Se a escada parasse de repente, quantos degraus ficariam visíveis?

Sem nada dizer, colocou a bolha de sabão sobre a cadeira, subiu e desceu um dos vãos da escada. Apontando para o relógio, disse:

– Eu desço a escada duas vezes mais rápido do que subo.

E repetiu sua viagem ao vão da escada, mostrando-me que, no mesmo tempo em que dava um passo para subir, dava dois para descer. Novamente sem nada dizer, começou a subir a escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de vinte passos. Do alto da escada, olhou-me como quem estivesse fazendo a mais óbvia das coisas, e começou a descer a mesma escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de trinta e cinco passos.

Em seguida tomou o lápis e o papel de minhas mãos e completou, com traços infantis, o meu desenho.

Nenhum censurador poderia me conter. Levantei-me bruscamente e apertei o botão vermelho. Ansioso, comecei a contar os degraus. Para meu espanto, correspondia ao desenho do menino. Com a maior seriedade que já tive em minha vida voltei-me para o menino e perguntei-lhe:

– Por que o pepino parece “inreal”?

Quantos degraus o menino desenhou?

Vamos à resposta:

Vamos tomar como unidade de tempo o tempo no qual o menino dá um passo subindo a escada. Seja n o número de degraus da escada rolante que desaparecem (ou surgem) na unidade de tempo. Como o menino deu 20 passos para chegar ao topo da escada, ele demorou 20 unidades de tempo. Isso significa que desapareceram $20n$ degraus. Chamando de N o número de degraus visíveis, temos:

$$N = 20 + 20n \quad \text{ou} \quad n = \frac{N - 20}{20}. \quad (1)$$

O menino deu 35 passos para descer a escada rolante (que sobe). Lembremos que a freqüência de seus passos é duas vezes maior na descida que na subida. Ou seja, o tempo de dar dois passos descendo é igual ao de um passo subindo. Cada passo na descida demora $1/2$ da unidade de tempo. Ele demorou 35/2 unidades de tempo para descer a escada. Isso significa que surgiram $\frac{35n}{2}$ degraus novos. Assim,

$$N = 35 - \frac{35n}{2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{70 - 2N}{35}. \quad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{N - 20}{20} = \frac{70 - 2N}{35},$$

$$35N - 700 = 1400 - 40N$$

ou

$$75N = 2100, \text{ de onde}$$

$$N = \frac{2100}{75} = 28.$$

O menino desenhou 28 degraus.

A mídia e a mega-sena acumulada

Flavio Wagner Rodrigues

Introdução

Entre todas as loterias existentes no Brasil, a megasena é, ao menos em determinadas ocasiões, a que desperta o maior interesse na população. Isso se deve ao fato de as regras do jogo possibilitarem, de vez em quando, que as quantias oferecidas como prêmio sejam bastante respeitáveis. Quando isso ocorre, formam-se filas gigantescas nas casas lotéricas e os jornais, o rádio e a televisão fazem matérias sobre o assunto que tratam desde as chances de que alguém ganhe o prêmio máximo até o que o felizardo poderá fazer com todo aquele dinheiro. Os professores que dão aulas de Probabilidade e de Análise Combinatória são consultados sobre o funcionamento do jogo e especialmente sobre a eventual existência de alguma estratégia que melhore as chances de vitória do apostador. Este artigo é um relato sobre as perguntas que me fizeram e sobre as respostas que eu fui capaz de dar.

Embora eu acredite que a maioria dos leitores da **RPM**, assim como eu, já tenha tentado a sorte na Mega Sena, vamos dar uma breve descrição do jogo para atender aos leitores que, ou por princípio, ou por serem mais inteligentes do que nós jogadores, nunca arriscaram. Para apostar, você escolhe um mínimo de seis e um máximo de quinze dezenas no conjunto {01, 02, ..., 60}. Cada aposta simples de seis dezenas custa um real e, portanto, e você marca oito dezenas, estará concorrendo com

$$\binom{8}{6} = 28$$

jogos simples, e essa aposta custará vinte e oito reais. A Caixa Econômica Federal, que administra o jogo, sorteia seis dezenas distintas e são premiadas as apostas que contêm 4 (quadra), 5 (quina) ou todas as seis (sena) dezenas sorteadas. Como é difícil que alguém acerte as seis dezenas sorteadas, o prêmio é geralmente dividido entre poucos acertadores. Se num dado concurso ninguém acerta as seis dezenas, o prêmio fica acumulado para o concurso seguinte. Existem

$$\binom{60}{6}$$

resultados possíveis para um sorteio da megasena. Esse número é maior que 50 milhões (mais precisamente, ele é igual a 50 063 860) e creio que o leitor concordará comigo que só mesmo um grande otimista pode acreditar que vai ganhar com uma única aposta.

As probabilidades de sucesso na Mega Sena

O cálculo das probabilidades de que um apostador ganhe os prêmios oferecidos é um exercício simples de Análise Combinatória. Vamos mostrar como esse problema é resolvido, através de um exemplo. Suponha que o apostador fez um jogo com 10 dezenas e estará, portanto, concorrendo com

$$\binom{10}{6} = 210$$

jogos simples de 6 dezenas. Segue-se que a sua probabilidade de ganhar a sena vale

$$210 \Big/ \binom{60}{6} .$$

Para o apostador ganhar uma quadra, é necessário que quatro das seis dezenas sorteadas estejam entre as 10 nas quais ele apostou, e duas estejam entre as outras 50. As quatro podem ser escolhidas de

$$\binom{10}{4} = 210$$

maneiras e as outras de

$$\binom{50}{2} = 1225$$

maneiras. Existem, portanto, 210 × 1225 = 257250 resultados que dariam o prêmio da quadra para o apostador. De modo análogo, mostra-se que existem 12 600 resultados que dariam ao apostador o prêmio da quina. Logo, os valores aproximados das probabilidades de que um apostador, que jogou dez dezenas ganhe os prêmios da sena, quina e quadra são respectivamente iguais a 1/238 400, 1/3 973 e 1/195. Com o mesmo raciocínio são calculadas as probabilidades de apostas com um número qualquer de dezenas. Uma questão interessante para um curso introdutório de Análise Combinatória é perguntar o que acontece quando o jogador acerta a sena com uma aposta que tem mais de seis dezenas. Mais especificamente, quantas quadras e quantas quinas ele acertará também? No nosso exemplo, com 10 dezenas, ele ganhará, além da sena, 24 quinas e 90 quadras.

A acumulação programada

Nas diversas loterias administradas pela Caixa, sempre que o prêmio maior não saía e a quantia a ele destinada acumulava para o concurso seguinte, o interesse dos apostadores crescia, resultando num aumento considerável no número de apostas. Embora essa situação fosse interessante para a Caixa, o governo e os lotéricos, a sua ocorrência dependia do acaso. Com o objetivo de manter o interesse dos apostadores e conseqüentemente aumentar a arrecadação, foi criada a acumulação forçada que reserva uma parte do prêmio (vinte por cento do total destinado à Sena) para ser acrescentada ao rateio dos concursos cujos números terminam em zero. Assim, por exemplo, em cada um dos concursos de números 201, 202, ..., 209, vinte por cento do prêmio da Sena ficam retidos para serem acrescentados ao prêmio do concurso 210. Em várias ocasiões o acaso também faz sua parte e isso acaba elevando o valor do prêmio a um patamar bastante alto. No segundo semestre de 1999, repetidas acumulações fizeram com que o prêmio superasse 60 milhões de reais. Esse valor, superior a 30 milhões de dólares, está no nível dos prêmios de loterias do primeiro mundo, principalmente se levarmos em conta que, aqui no Brasil, ele é isento de imposto de renda.

AS PERGUNTAS MAIS FREQÜENTES

1. Intuitivamente o que significa ter uma chance em cinqüenta milhões?

Com o objetivo de fazer com que seus leitores entendam o que significa essa probabilidade tão pequena, os jornalistas pedem que façamos comparações com a possibilidade da ocorrência de outros eventos. É curioso que as comparações solicitadas quase sempre envolvem um evento auspicioso (ganhar o prêmio máximo da megasena) com tragédias tais como morrer em desastre de avião, ser atingido por um raio ou morrer de câncer. A maior dificuldade em fazer essas comparações está no fato de que nem todos os indivíduos da população têm a mesma probabilidade de sofrer uma dessas desgraças, enquanto todos os que apostam 6 dezenas têm a mesma chance de acertar a megasena. Eu acredito que a maneira mais fácil de fazer as pessoas entenderem é usando um outro exemplo puramente aleatório. O número de habitantes do Brasil é quase igual a três vezes o número de resultados possíveis do sorteio. Se fosse realizado um sorteio de três prêmios entre toda a população brasileira, a sua chance de ganhar um deles seria igual à de ganhar o prêmio máximo da megasena com um jogo de seis dezenas. No *Você sabia?* da **RPM** 4l, pág. 29, foi observado que é mais fácil obter 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda do que ganhar na megasena com uma aposta de 6 dezenas.

2. Existe uma forma de apostar que melhore as chances do jogador?

Essa pergunta é geralmente feita na sala de aula por alunos curiosos em saber se o professor conhece algum truque ou algum sistema que preferencialmente garanta a vitória. A análise dos resultados dos sorteios realizados até hoje parece indicar que todas as dezenas são igualmente prováveis e que os resultados de diferentes sorteios são independentes. Não existem, portanto, elementos que nos permitam construir um sistema que melhore as nossas chances de vitória. Na sala de aula comento também que, se eu conhecesse um sistema, não iria contar para ninguém e provavelmente não estaria mais dando aulas.

3. Devo jogar no 13 que é a dezena que mais vezes foi sorteada, ou no 48, que foi a que saiu menos vezes?

O mesmo argumento usado na resposta da questão 2 nos leva a afirmar que, do ponto de vista teórico, tanto faz jogar no 13, no 48 ou em qualquer outra dezena. Agora, se você fizer questão de escolher com base nos resultados de concursos anteriores, eu recomendaria o 13 e não o 48. Isso porque, se tudo estiver funcionando corretamente, tanto faz, mas, caso exista uma pequena distorção (que os testes estatísticos não conseguem detectar), tudo indica que ela estaria favorecendo o 13 e não o 48.

4. Se eu estiver disposto a jogar 28 reais, é melhor fazer um único jogo de 8 dezenas ou vinte e oito jogos de 6 dezenas?

Essa é uma questão interessante, pois, embora as duas formas de jogar sejam equivalentes (supondo 28 jogos distintos de 6 dezenas) no que diz respeito à sena, isso não é verdade com relação à quadra e à quina. De fato, com um único jogo de 8 dezenas existirão

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{52}{1} = 2912$$

resultados possíveis que darão prêmio da quina ao apostador. Com um único jogo de 6 dezenas, o apostador terá

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{54}{1} = 324$$

resultados contendo uma quina. Se os vinte e oito jogos não tiverem nenhuma quina em comum, o total de resultados favoráveis será igual a $28 \times 324 = 9072$. A probabilidade de acertarmos uma quina com o segundo sistema é mais do que três vezes maior do que com o primeiro. Essa diferença é, pelo menos parcialmente, compensada pelo fato de que, acertando uma quina com o jogo de 8 dezenas, receberemos três vezes o valor do prêmio. Os mesmos cálculos efetuados para a quadra mostram que, com um jogo de 8 dezenas, nós teremos 92 820 resultados favoráveis e com 28 jogos de 6 dezenas (que não tenham quadras em comum) nós teremos 601 020 resultados favoráveis, o que nos dá uma probabilidade que é aproximadamente 6,5 vezes maior. Uma vez mais vale a pena observar que, se acertarmos a quadra com o jogo de 8 dezenas, receberemos 6 vezes o valor do prêmio.

5. Vale a pena jogar?

Do ponto de vista teórico, é fácil ver que a resposta é não. De fato, você estaria colocando dinheiro num jogo que destina apenas 44% da arrecadação para os prêmios e no qual a sua probabilidade de ganhar alguma coisa que valha a pena é muito pequena. Para aqueles que acreditam na sorte e gostam de arriscar de vez em quando, aí vão algumas sugestões:

a) Nunca aposte muito dinheiro. De fato, com a aposta de 15 dezenas, que custará 5 005 reais, a sua probabilidade de ganhar o prêmio é aproximadamente igual a 1/10000. Portanto, a probabilidade de que você perca o seu dinheiro é bem grande e, se você é capaz de perder 5 000 reais sem se importar, você é uma pessoa que não precisa de loterias.

b) Aposte de preferência nos concursos de final zero. Nesses concursos você não está contribuindo para o prêmio de futuros apostadores, está concorrendo a um prêmio maior e principalmente está concorrendo a quantias que outros já perderam.

Vamos terminar com um argumento que serve para justificar essa pequena fraqueza de arriscar de vez em quando. Se você pode, sem nenhum sacrifício, dispor de 10 reais por semana e decidir guardá-los, você terá, em valores corrigidos, 520 reais após um ano e conseqüentemente 10 400 reais após vinte anos. Com esse procedimento, a probabilidade de que você fique rico é zero. Se você jogar dez reais por semana, a probabilidade de que você fique rico é quase zero, mas não é zero.

Na ilha dos sapatos gratuitos

Manoel Henrique Campos Botelho

Uma Explicação pela Matemática ou pela Economia?

Cena nº 1 – O problema

Um dia, estava eu tranqüilamente na faculdade pensando na vida quando chegou um colega e me fez uma inusitada proposta:

– Você quer comprar de graça (?!) um sapato?

É claro que eu topei de cara comprar de graça(?!) um sapato, embora eu desconfiasse que houvesse algum rolo. As condições eram:

– primeiro comprar um selinho desse meu amigo. Preço R$ 3,00;

– juntar mais R$ 27,00 e o selinho e levar a uma loja próxima. Eu receberia um par de sapatos de valor de mercado de R$ 30,00 e mais dez selinhos no valor de R$3,00;

– bastaria então eu vender os dez selinhos que eu seria restituído dos R$ 3,00 iniciais de compra do selinho do meu amigo e dos R$ 27,00 que anexei para retirar o sapato da loja.

Expostas as condições topei o desafio. Dei R$ 3,00 ao meu colega para o inicio do processo, juntei mais R$ 27,00 e fui à loja. Efetivamente retirei um par de sapatos de valor de mercado de cerca de R$ 30,00 e ganhei os dez selinhos que me iriam restituir tudo o que investira.

Saí então a vender os dez selinhos. Vendi-os com alguma facilidade. Fiz então um balanço. Eu tinha até então gasto R$ 30,00, recebido R$ 30,00 e mais um par de sapatos. Um par de sapatos de graça, portanto. Quando se fechou o ciclo tive um estalo, teria ganho mesmo um sapato de graça? Como isso seria possível? Não estaria essa promoção violando a Lei de Lavoisier ou a Segunda Lei da Termodinâmica? Fiquei estarrecido com o problema. Como interpretá-lo?

Cena nº 2 – As explicações convencionais

Aturdido com o problema que aparentemente violava leis naturais nunca dantes questionadas, saí a conversar com meus colegas de faculdade. O primeiro a tentar responder foi Altarimando. Ele se entusiasmou.

"Não se preocupe se essa promoção fere ou não as leis da natureza. O importante é que funciona. Assim como você conseguiu comprar sapatos de graça vamos expandir o negócio para comprar arroz de graça, roupa de graça, etc. Talvez esse seja o perdido caminho para a humanidade alcançar o Nirvana, o tão desejado Shangrilá. Não se esqueça de que as Leis de Mercado são superiores à Lei de Lavoisier."

Desconfiei que ele estava mais para poeta transcendental que crítico de Matemática e Física e fui procurar o Souzinha. Souzinha era um crítico de tudo. Logo deu seu parecer, claro e taxativo, incisivo e demolidor, característico de todo jovem de menos de quarenta anos:

"Estamos diante da chamada Bola-de-Neve, Conto da Venda Sucessiva ou ainda da Corrente da Felicidade. É um estratagema que favorece barbaramente os compradores iniciais e é altamente desvantajoso para os finais."

Pode-se concluir facilmente que o número de compradores numa etapa x é:

$$F(x) = 10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^x$$

O universo possível de compradores é N - número finito inteiro. Logo a corrente se estabiliza antes da etapa y ou em y quando y é tal que:

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^y \geq N$$

Quando o somatório se iguala ou excede N, os últimos compradores serão prejudicados.

Logo, essa artimanha é tão simplesmente uma falácia. Continuam válidos, portanto, a Lei de Lavoisier e o Segundo Princípio da Termodinâmica.

Fiquei feliz, confesso, por essa explicacão do Souzinha.

As pessoas como nós, matemáticos e engenheiros, com a mente criada e disciplinada por critérios lógico-formais cartesianos têm verdadeiro horror a situações que fujam desse modo e, o que é pior, funcionem. Se isso pudesse ocorrer, ficaríamos inseguros, e toda uma vida ficaria questionada.

E o caro leitor, o que achou da historieta contada até aqui? Com qual explicação fica? Com a do feliz Altarimando ou com a do crítico Souzinha? Ou haveria uma terceira, inesperada e surpreendente alternativa? É o que veremos a seguir.

Cena nº 3 – A explicação diferente

Quando eu já estava disposto a encerrar o assunto, encontrei um velho amigo, Adão, estudante de Economia na Getúlio Vargas.

Apesar de jovem, Adão é crítico ponderado e profundo em seus conhecimentos.

Só como curiosidade, expus a ele o problema e as duas respostas que eu tinha ouvido até então.

Adão, filosoficamente, começou a raciocinar socraticamente.

– Quanto é mesmo que a loja recebe por par de sapatos vendido?

Ora Adão respondi, o enunciado é claro. Ela recebe R$ 30,00 por par de sapatos.

– Acho que aí temos uma pista. Acho que não é esse o valor, ponderou Adão. E continuou:

– Admitamos uma ilha com 1 111 pessoas potencialmente clientes dos sapatos e mais uma pessoa que é o dono da loja totalizando pois 1 112 pessoas. O dono da loja propõe o negócio a um primeiro cliente. Compre este selo por R$ 3,00 e adicione R$ 27,00 e deflagre o processo. Esse primeiro cliente vende dez selos. Dez compradores vendem depois para 100 outros compradores. Já são 111 compradores. Os cem compradores vendem agora para 1 000 compradores. Esses últimos 1.000 compradores que já gastaram cada um R$ 3,00 pelo selo não têm mais para quem vender. Uma de suas opções é perder esse selo. Outra (mais razoável) é acrescentar R$ 27,00 e ir buscar o seu par de sapatos que, como sabemos, vale no mercado R$ 30,00. Logo esses últimos compradores não serão prejudicados financeiramente (só não terão o seu sonho de sapatos grátis).

Agora façamos um raciocínio. Quanto recebeu a loja de sapatos e quantos pares de sapatos foram entregues? Curiosamente você verá que a loja não recebe R$ 30,00 por par de sapatos vendido.

A loja recebeu em dineiro:

do 1.º comprador:	$3{,}00 + 27{,}00$	=	30,00
de 10 compradores:	$10 \times 27{,}00$	=	270,00
de 100 compradores:	$100 \times 27{,}00$	=	2700,00
de 1000 compradores:	$1000 \times 27{,}00$	=	27.000,00
	Total		R$ 30.000,00

Total de pares de sapatos vendidos = 1111

Receita média da loja por par de sapato $= \dfrac{30.000{,}00}{1111} \cong 27{,}03$.

Conclusão – A loja vende cada par de sapatos a R$ 30,00 e recebe na prática R$ 27,00 e não R$ 30,00 como supostamente se poderia pensar. Vê-se, portanto que cada pessoa para ganhar um par de sapatos precisa entregar o sinal (entrada) e ter o trabalho de vender dez outros sapatos. O caso em estudo é um processo que traz embutido um trabalho de venda como custo. Custo esse que é pago pela loja (30,00 – 27,03) = R$ 2,97 por par de sapatos. É uma comissão de venda. Tudo claro, Botelho?

Fiquei a pensar.

Como as coisas ainda estão algo confusas dentro de mim, peço apoio aos leitores da Revista do Professor de Matemática.

Vejam se existe alguma outra explicação. Mas por favor, prefiro receber respostas que não ponham em cheque Leis que até agora acreditei tão válidas como a Lei de Lavoisier, Teorema de Pitágoras, etc.

Ok?

NR: Uma resposta já temos

ERAM GRATUITOS OS SAPATOS?

RPM:

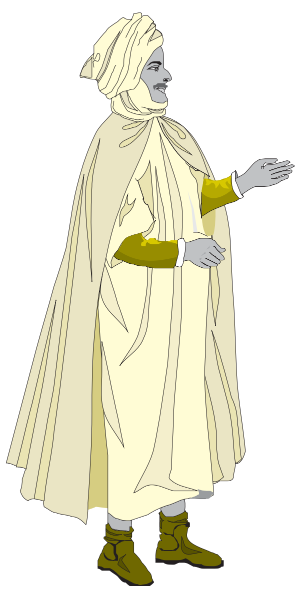
1. Se a historia passasse no instante em que nosso amigo Botelho acabou de vender seus dez selinhos, o que estaria acontecendo é que dez pessoas (os compradores dos selinhos) teriam se cotizado para comprar um par de sapatos para ele.

2. Na história, nada obriga que cada comprador se limite a adquirir um par de sapatos apenas. Para citar um caso extremo, podemos supor que o primeiro comprador, em vez de vender os 10 selinhos que recebeu da loja, fica com eles e com isso compra mais dez pares de sapatos a 18 mil cruzeiros cada, recebe 100 selinhos., etc, até acabar com o estoque da loja. Depois, revende todos os sapatos ao preço oficial de 200 mil cruzeiros. Em vez de um par de sapatos de graça, ganha muito mais.

3. Do ponto de vista da loja, o que ela fez corresponde simplesmente a vender cada par de sapatos a 18 mil cruzeiros , exceto o primeiro, vendido por 20 mil. Os selinhos são apenas um truque de marketing. A loja vende por 18 mas, como o preço usual é 20, a diferença é dividida entre alguns felizardos, ou espertos. O exemplo do economista Adão, em que cada habitante da ilha compra apenas um par de sapatos, é o extremo oposto do caso 2 acima. Na prática ocorrem, em geral, situações intermediárias em que algumas pessoas formam estoque para revenda (podendo em seguida organizar cartéis para manipular os preços, mas isto já seria outra história).

Malba Tahan e as escravas de olhos azuis

Zoroastro Azambuja Filho



Na seção de livros de uma loja de departamento, deparei-me outro dia, por acaso, com um exemplar da 27ª edição de *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan. (Editora Record, Rio de Janeiro, 1983). Quarenta anos depois de o ter lido pela primeira vez, não resisti à tentação nostálgica de reviver antigas emoções. Comprei-o e o reli. Para os mais jovens leitores da **RPM**, talvez tenha alguma utilidade dizer algumas palavras sobre esse autor e sua obra.

Malba Tahan, pseudônimo do Professor Júlio César de Mello e Souza, exerceu uma influência singular entre os estudantes da minha geração. Para os não-especialistas, em particular para a imprensa, ele foi, enquanto viveu, o maior matemático do Brasil. Esse julgamento, que pouco tinha a ver com a realidade, resultava principalmente do grande número de livros que ele escreveu (quase uma centena), muitos deles sobre Matemática. Eram livros de divulgação, escritos num estilo claro, simples e agradável, peculiar ao autor. Neles, a ênfase maior era dada à História da Matemática e a exposições sobre tópicos elementares, inclusive da Matemática que fora moderna no princípio deste século, com destaque para aspectos pitorescos, paradoxais, surpreendentes ou controversos.

Embora os livros de Malba Tahan tenham sido criticados por tratarem seus assuntos de forma superficial, por conterem alguns erros sérios de concepção por serem em grande parte, meras compilações e coletâneas de citações, é forçoso reconhecer que alguns desses livros tiveram grande aceitação. O que significa que havia no país um numeroso público, na maioria jovem, ávido por conhecer melhor a Matemática, sua história e seus desenvolvimentos. Principalmente pessoas ansiosas por ouvir alguém falar da Matemática sob forma menos árida e antipática do que seus tradicionais e severos professores, com seus igualmente áridos compêndios. Essa necessidade foi suprida, devemos admitir, com bastante sucesso, por Malba Tahan.

Olhando em retrospecto, podemos hoje achar que esse papel de propagandista da Matemática deveria ter sido ocupado por alguém com melhor treinamento profissional, isto é com mais competência científica. Alguém como Amoroso Costa, talvez. Mas Amoroso morreu cedo e, mesmo assim, em que pese a sua vasta cultura, o país ainda não estava maduro para um divulgador do seu nível.

Malba Tahan surgiu na hora certa, com o nível e o estilo que minha geração queria. Se o analisarmos como matemático, estaremos olhando para o lado errado. Mas, se mudarmos o enfoque, podemos vê-lo mais adequadamente como jornalista, divulgador, antologista ou contador de histórias. Como contador de histórias, ele tem grandes momentos e *O Homem que Calculava* é o seu melhor trabalho. Em suas 27 edições, *O Homem que Calculava* muito fez para estimular o cultivo da arte de resolver problemas, incutir o amor pela Matemática e destacar aspectos nobres e estéticos desta Ciência. Eu era menino quando minha irmã mais velha ganhou um exemplar desse livro como presente de seu professor. Lembro-me que o devorei avidamente. E ao relê-lo agora, não obstante os muitos *calos* que me deixou o longo exercício do magistério, ainda senti algumas das mesmas emoções de outrora, diante de certos trechos de rara beleza.

Como toda obra, o livro tem seus pontos altos e outros, nem tanto. Curiosamente, as coisas que mais me agradaram na leitura de hoje foram aquelas das quais guardava ainda alguma lembrança desde a primeira vez.

O Homem que Calculava é a história de Beremiz Samir, um fictício jovem persa, hábil calculista, versado na Matemática da época, contada por um amigo, admirador e companheiro de viagens, uma espécie de Dr. Watson muçulmano. Em certas passagens, a narrativa das proezas matemáticas de Beremiz, nos diferentes lugares por onde passava, nos faz lembrar o Evangelho segundo São Marcos. O relato, feito por um maometano ortodoxo, é cheio de respeitosas evocações divinas e pontilhado pela linguagem pitoresca dos árabes de novela. Isto é feito com graça e dá um colorido especial ao conto.

Beremiz Samir resolve problemas curiosos – alguns propostos, outros acontecidos naturalmente em suas andanças. Faz também discursos eloqüentes sobre o amor a Deus, a grandeza moral e a Matemática. E dá aulas de Matemática bastante inspiradas à filha de um cheique, com a qual vem a casar-se no fim da história. Para que se tenha uma idéia dos problemas tratados, descrevemos o primeiro, o segundo e o último deles.

No primeiro problema, Beremiz e seu amigo, viajando sobre o mesmo camelo, chegam a um oásis, onde encontram três irmãos discutindo acaloradamente sobre como dividir uma herança de 35 camelos. Seu pai estipulara que a metade dessa herança caberia ao filho mais velho, um terço ao do meio e um nono ao mais moço. Como 35 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 9, eles não sabiam como efetuar a partilha. Para espanto e preocupação do amigo, Beremiz entrega seu camelo aos 3 irmãos, a fim de facilitar a divisão. Os 36 camelos são repartidos, ficando o irmão mais velho com 18, o do meio com 12 e o mais moço com 4 camelos. Todos ficaram contentes porque esperavam antes receber 17 e meio, 11 e dois terços e *3* e oito nonos, respectivamente. E o melhor: como $18 + 12 + 4 = 34$, sobraram 2 camelos, a saber, o que fora emprestado e mais um. Todo mundo saiu ganhando. Explicação: *um* meio mais *um* terço mais um nono é igual a 17/18; logo da menor do que 1. Na partilha recomendada pelo velho árabe sobrava algo, do que se aproveitaram Beremiz e seu amigo.

O segundo problema é uma pequena delícia. Beremiz e seu amigo, a caminho de Bagdá, socorrem no deserto um rico cheique, que fora assaltado, e com ele repartem irmãmente sua comida, que se resumia a 8 pães: 5 de Beremiz e 3 do amigo. Chegados ao seu destino, o cheique os recompensa com de oito moedas de ouro: 5 para Beremiz e 3 para o amigo. Todos então se surpreendem com os suaves protestos de Beremiz. Segundo este, a maneira justa de repartir as 8 moedas seria dar 7 a ele e 1 apenas ao amigo! E prova: durante a viagem, cada refeição consistia em dividir um pão em 3 partes iguais, e cada um dos viajantes comia uma delas. Foram consumidos ao todo 8 pães, ou seja, 24 terços, cada viajante comendo 8 terços. Destes, 15 terços foram dados por Beremiz, que comeu 8, logo contribuiu com 7 terços para a alimentação do cheique. Por sua vez, o seu amigo contribuiu com 3 pães, isto é, 9 terços, dos quais consumiu 8; logo participou apenas com 1 terço para alimentar o cheique. Este é o significado da observação de Beremiz.

No final, porém, o homem que calculava, generosamente ficou com apenas 4 moedas, dando as 4 restantes ao amigo.

O último problema do livro se refere a 5 escravas de um poderoso califa. Três delas têm olhos azuis e nunca falam a verdade. As outras duas tem olhos negros e só dizem a verdade. As escravas se apresentaram com os rostos cobertos por véus e Beremiz foi desafiado a determinar a cor dos olhos de cada uma, tendo o direito a fazer três perguntas, não mais do que uma pergunta a cada escrava. Para facilitar as referências, chamaremos as 5 escravas *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.

Beremiz começou perguntando à escrava *A*: "Qual a cor dos seus olhos?" Para seu desespero, ela respondeu em chinês, língua que ele não entendia, por isso protestou. Seu protesto não foi aceito, mas ficou decidido que as respostas seguintes seriam em árabe. Em seguida, lê perguntou à *B*: "Qual foi a resposta que *A* me deu?" *B* respondeu: "Que seus olhos eram azuis". Finalmente, Beremiz perguntou à *C*: "Quais as cores dos olhos de *A* e *B*?" A resposta de *C* foi: "*A* tem olhos pretos e *B* tem olhos azuis". Neste ponto, o homem que calculava concluiu. "*A* tem olhos pretos, *B* azuis, *C* pretos, *D* azuis e *E* azuis". Acertou e todos ficaram maravilhados.

Explicação para a dedução de Beremiz: Em primeiro lugar, se perguntarmos a qualquer das cinco escravas qual a cor dos seus olhos, sua resposta só poderá ser "negros", tenha ela olhos azuis ou negros, pois na primeira hipótese ela mentirá e na segunda dirá a verdade. Logo, *B* mentiu e portanto seus olhos são azuis. Como *C* disse que os olhos de *B* eram azuis, *C* falou a verdade, logo seus olhos são negros. Também porque *C* fala a verdade, os olhos de *A* são negros. Como somente duas escravas tem olhos negros, segue-se que os olhos de *D* e *E* são azuis.

Certamente Malba Tahan escolheu este caso para o fim do livro porque desejava encerrá-lo com chave de ouro, tal a beleza do problema. Podemos, entretanto, fazer três observações que reduzem bastante o brilho desse *gran finale*:

1) O método usado por Beremiz não permite sempre resolver o problema. Ele acertou por mero acaso. Com efeito, se os olhos de *A* fossem azuis (admitindo ainda que *B* tenha olhos azuis e *C*, negros), ele só poderia concluir que, no caso de *D* e *E*, uma teria olhos azuis e a outra olhos negros. Mas não poderia dizer qual delas. Mais precisamente: o raciocínio utilizado por Beremiz permite determinar apenas as cores dos olhos de *A*, *B* e *C* . Por exclusão, conclui-se que *D* e *E* têm as cores que faltam, mas não se pode especificar a cor de cada uma, quando essas cores forem diferentes.

2) Se Beremiz fosse mais esperto, encontraria um método infalível para determinar a cor dos olhos de cada uma das escravas, *fazendo apenas uma única pergunta*! Bastava chegar junto a uma das escravas (digamos, *A*) e perguntar: "Qual a cor dos olhos de cada uma de vocês?" Como há 3 escravas de olhos azuis e 2 de olhos negros, só haveria duas respostas possíveis. Se *A* tivesse olhos negros, sua resposta mencionaria duas escravas de olhos negros três de olhos azuis e seria a resposta certa. Se *A* tivesse olhos azuis, sua resposta seria três escravas de olhos negros e duas de olhos azuis e, neste caso, bastariam inverter sua resposta para obter a verdade.

3) A solução de Beremiz e aquela dada no item 2 acima, fazem uso de uma informação parentemente essencial: quantas escravas de olhos azuis e quantas de olhos negros existem no grupo. Suponhamos agora que essa in-

formação seja omitida. Têm-se *n* escravas, cujos olhos podem ser azuis ou negros. As primeiras mentem sempre, as últimas nunca. Pode haver de 0 a *n* escravas de olhos azuis; conseqüentemente, o número de escravas de olhos negros também não é fornecido. *Mesmo assim,ainda é possível determinar a cor dos olhos de cada uma por meio de uma única pergunta!* Basta perguntar à escrava *A* o seguinte: "Se meu amigo lhe indagasse qual a cor dos olhos de cada uma das *n*, que lhe responderia você?"

A resposta de *A* para mim consistiria em atribuir a cada escrava uma cor de olhos. Pois bem, seja qual fosse a cor dos olhos de *A*, fosse ela mentirosa ou não, a cor dos olhos de cada escrava seria exatamente aquelas dada por sua resposta a mim.

Com efeito, apenas por uma questão de método, vamos supor que *A* começasse sua resposta pela cor dos seus próprios olhos. Haveria então duas possibilidades quanto ao começo da resposta de *A*.

Primeira: "Eu diria ao seu amigo que meus olhos são negros, que os olhos de *B* são...etc". Neste caso, *A* não me mente, porque ela só poderia dizer ao meu amigo que seus olhos são negros. Logo, seus olhos são mesmo negros e sua resposta contém a verdade.

Segunda: "Eu diria ao seu amigo que meus olhos são azuis, que os de *B* são .... etc". Então *A* é mentirosa, pois ela não poderia dizer a ninguém que seus próprios olhos são azuis. Portanto, *A* mentiria ao meu amigo e me diria ao contrário; logo, me contaria a verdade.

Apesar de ter estragado um pouco da festa de Beremiz com as escravas, espero ter deixado claro que me diverti lendo *O Homem que Calculava*, tanto agora como da primeira vez. A solução explicitada em 2) foi por mim imaginada naquela época, embora as pessoas que me conhecem, ou que sabem a cor dos meus olhos, duvidem muito desta afirmação.

Sobre uma história de Malba Tahan

Jesús A. P. Sánchez

O problema dos 1000 dinares

Talvez muitos não saibam que Malba Tahan, autor do encantador livro *O homem que calculava,* foi o professor de Matemática brasileiro chamado Júlio César de *Mello e Souza* (1895-1974). Além de autor de mais de cem livros de Literatura Oriental, Didática e Matemática, foi um mestre na arte de contar histórias. Neste artigo farei referência a uma delas.

Trata-se do *problema dos mil dinares*, apresentado em seu livro *Novas Lendas Orientais* (Editora Record, 1990). A Beremiz, protagonista de *O homem que calculava,* apresentou-se o seguinte desafio aritmético:

Determinar como 1 000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

a) *A numeração das caixas, de* 1 *até* 10*, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.*

b) *É possível fazer qualquer pagamento, de* 1 *a* 1 000 *dinares, sem precisar abrir as caixas.*

Depois de pensar um pouco, Beremiz apresentou a seguinte solução:

A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de um dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas pois, se tivesse três, quatro ou mais dinares, não seria possível fazer um pagamento de dois dinares.

A caixa número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Beremiz continua o seu raciocínio, até estabelecer a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9.

Caixa e Moeda(s)

Quanto à décima caixa, conclui que deve conter

$$1000 - (2^8 + 2^7 + \dots + 2^1 + 2^0) = 489 \text{ moedas}$$

Justificativa da solução, usando notação binária

Uma justificativa da solução de Beremiz pode ser fornecida, utilizando-se a notação binária (base 2) para representar os números.

Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$$352 = 1.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

Visto que 511 é 111111111 em notação binária, para fazer um pagamento dessa quantia escolhemos todas as caixas, da primeira até a nona.

Para cancelar uma dívida de x dinares, com $551 < x \leq 1000$, escolhemos a caixa número 10 e, para o resto, $x - 489$ tomamos uma ou mais caixas dentre as nove primeiras.

Como curiosidade, observamos que uma dívida estritamente compreendida entre 490 e 512 dinares pode ser paga de duas maneiras, usando ou não a décima caixa. Por exemplo, uma soma de 500 dinares pode ser obtida com as caixas de números 10, 4, 2 e 1, pois $500 = 489 + 1.2^3 + 1.2^1 + 1.2^0$. Mas, também, $500 = 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$, isto é 111110100 na notação binária; logo, poderíamos também utilizar as caixas de números 9, 8, 7, 6, 5 e 3.

A lei de Alcides

Paulo Afonso da Mata Machado

No meu tempo de aluno do Colégio Estadual de Minas Gerais, em Belo Horizonte, havia um inspetor de nome Alcides que tinha como uma de suas funções ir para a sala na qual o professor houvesse faltado e ficar com os alunos durante o horário da aula. Ele cumpria essa função com muito gosto e, geralmente, ia para o quadro-negro, como se estivesse dando aula, e perguntava:

– Como se calcula o quadrado de um número terminado em 5?

Muitos alunos reclamavam:

– Essa não, Alcides, conta outra!

Ele não ligava para os comentários e enunciava a regra:

– Separa-se o último algarismo do número e multiplica-se o número restante por seu sucessor; em seguida, acrescenta-se 25.

E dava o exemplo esclarecedor:

– Seja o número 35; separamos o último algarismo e fica 3; em seguida multiplicamos pelo sucessor, ou seja, 4: 3 vezes quatro é igual a 12. Depois acrescentamos 25. Pronto! O resultado é 1 225.

A lei de Alcides é muito fácil de ser explicada. Qualquer número terminado em 5 pode ser escrito como sendo igual a $10y + 5$, sendo y o número que resta após a retirada do último algarismo. Se elevamos esse número ao quadrado, obtemos

$100y^2 + 100y + 25$ ou $100y(y + 1)$. Está demonstrada a lei de Alcides.

Certo dia, encontrei-me com Alcides dando voltas na Praça da Liberdade e conversamos sobre o colégio no qual estivemos juntos trinta anos atrás. Perguntei a ele:

— Como se calcula o quadrado de um número terminado em 5? Ele foi pronto na resposta, lembrando-se perfeitamente da regra.

Pois bem, meu caro Alcides, a sua lei vai ser útil para que eu resolva o problema: "O número natural $N = 11... 122 ...25$ tem $2n$ algarismos. Os $n - 1$ primeiros são iguais a 1, os n seguintes são iguais a 2 e o último é 5. Mostre que, para $n \geq 2$, N é um quadrado perfeito e determine, em função de n, a raiz quadrada de N".

Se $N = m^2$, então m deve terminar em 5 e pela lei de Alcides o número

$$P = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\,\underbrace{22\ldots2}_{n-1},$$

que é o N "separado" do 25, deve ser o produto de dois números naturais consecutivos. Temos:

$$P = 1 \cdot 10^{2n-3} + \cdots + 1 \cdot 10^{n-1} + 2(10^{n-2} + \cdots + 1)$$
$$= \frac{(10^{n-1} - 1)(10^{n-1} + 2)}{9} = \frac{10^{n-1} - 1}{3} \times \frac{10^{n-1} + 2}{3}.$$

Observando que o segundo número desse produto é um inteiro, pois, sendo a soma dos algarismos de $10^{n-1} + 2$ igual a 3, esse é um número divisível por 3. Além disso, como $\frac{10^{n-1} + 2}{3} = 1 + \frac{10^{n-1} - 1}{3}$, temos $P = k(k + 1)$, sendo k o natural $\frac{10^{n-1} - 1}{3}$.

Seja $m = k5$ o número formado pelos algarismos de k seguido de 5.

Então,

$$m = 10 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{3} + 5 = \frac{10^n + 5}{3}, \quad \text{que implica} \quad N = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2.$$

O editor e a média

Luiz Márcio Imenes

Em dezembro do ano passado, um amigo que é editor pediu-me que o ajudasse na solução de um problema. O custo de reimpressão de um livro depende de dois fatores: papel e gráfica. O gasto com papel representa 60% daquele custo e as despesas com gráfica os restantes 40%. Exemplificando: se, na ocasião, a reimpressão de um livro custasse R$ 10.000, então R$ 6.000 seriam devidos ao papel e R$ 4.000 à gráfica. Disse-me ele ainda que, no prazo de um ano, o preço do papel havia subido 25,9% e os custos com gráfica 32,5%. O seu problema era saber de quanto deveria subir o preço do livro.

Este é um exemplo prático, simples e interessante, de aplicação do conceito de média ponderada. Os pesos desta média são as porcentagens com que cada uma das duas componentes, papel e gráfica, pesam no custo de reimpressão do livro. Portanto, o aumento do preço do livro deve ser calculado assim:

$$\frac{60 \times 25{,}9\,\% + 40 \times 32{,}5\,\%}{100} = 28{,}54\,\%$$

Qual é a parte de cada um?

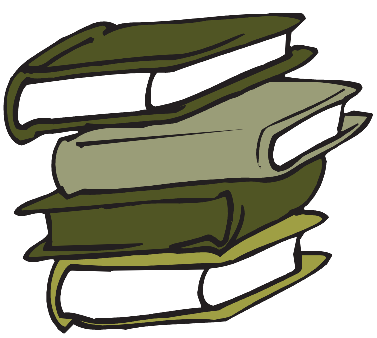
Certa vez, trabalhando numa escola particular de 1º grau (atual ensino fundamental), uma das proprietárias apresentou-me o seguinte problema: quando foi fundada, a escola tinha apenas as quatro primeiras séries do 1º grau (primário). A sociedade fundadora era constituída por três professoras que haviam investido capitais iguais. O ginásio (5ª a 8ª série do atual ensino fundamentel) foi criado mais tarde, sendo que participou da sua fundação, além das três, uma quarta professora. As quatro investiram capitais iguais.

O curso primário funcionava num prédio e o ginásio,em outro, localizado nas proximidades do primeiro. Ambos os prédios eram alugados.

As quatro sócias estavam pretendendo construir um prédio que abrigasse todo o 1º grau. Para isso precisavam investir, em conjunto, uma certa quantia. Qual a parte de cada uma, se elas pretendiam manter suas posições na sociedade?

É claro que as sócias haviam percebido que as três mais antigas estavam em igualdade de condições, mas que a parte da outra deveria ser diferente, e menor do que a delas.

Para resolver o problema vamos indicar por P o valor do primeiro empreendimento, que é o curso primário, e por G o valor do segundo empreendimento, que é o curso ginasial. Portanto, o valor total do empreendimento é $P + G$. As três sócias mais antigas são proprietárias, cada uma de:



$$\frac{1}{3}P + \frac{1}{4}G$$

e a que só é sócia do ginásio é proprietária de: $\frac{1}{4}G$.

Portanto, a sua parte na empresa toda é:

$$\frac{\frac{1}{4}G}{P + G}.$$

Por exemplo: se após uma avaliação se constatasse que

P = R\$ 1.000.000,00 e G = R\$ 800.000,00,

então a parte da quarta sócia seria:

$$\frac{\frac{1}{4} \times 800.000}{1.000.000 + 800.000} = \frac{1}{9}$$

Neste caso, as três sócias antigas deveriam então entrar, em conjunto, com 8/9 do investimento total, cabendo 8/27 a cada uma.

Como dar descontos

Um aluno que trabalhava no setor de vendas de uma fábrica de calçados, apresentou-me o seguinte problema: a empresa dava aos clientes um desconto de 10% para compras à vista; dava ainda mais 10% de desconto para compras acima de 2.000 e abaixo de 10.000 pares de sapatos ou 15% para compras acima de 10.000 pares.

Sua dúvida era essa: se um cliente comprasse à vista, 12.000 pares, ele deveria dar primeiro 10% de desconto (pela compra à vista) e logo depois 15% (pela compra acima de 10.000 pares) ou poderia dar logo um desconto total de 25%?

Foi desta maneira que ele me colocou o problema, e, por algumas perguntas que lhe fiz, pude perceber que ele tinha a sensação de que não dava na mesma, mas não se sentia seguro quanto a isso.

Convidei-o a analisar a situação. Seja C o valor da compra. Recebendo um desconto de 10% seu cliente pagaria 0,90 C pela mercadoria. Sobre esse valor, sendo dado agora um desconto de 15%, o valor a ser pago passaria a ser $0{,}85 \times 0{,}90\ C = 0{,}765\ C$. Isto significa que o cliente pagaria 76,5% do valor de C, e que equivale a um desconto único de 23,5%.

Portanto, para seu cliente, era mais vantajoso um desconto de 25%!

Restava saber, na hora da decisão, a quem beneficiar: a empresa ou o cliente?

Situações deste tipo, envolvendo porcentagens, aparecem com freqüência. É comum as pessoas somarem porcentagens indevidamente. Na época da inflação acelerada, gastei muito tempo explicando para os alunos e outras pessoas que a inflação do trimestre *não* era a soma das inflações de cada um dos três meses. Assim, por exemplo, se as inflações de janeiro, fevereiro e março fossem, respectivamente, de 12%, 11% e 14% a inflação acumulada do trimestre não seria de 12% + 11% + 14% = 37%.

O cálculo correto deve ser feito assim: se p é o preço de uma mercadoria em fim de dezembro, então, em fim de janeiro ela custa: $1{,}12p$. Em fim de fevereiro: $1{,}11 \times 1{,}12p$ e em fim de março: $1{,}14 \times 1{,}11 \times 1{,}12p \cong 1{,}42p$.

Isto significa um aumento aproximado de 42%.

O conto do desconto

Um colega de trabalho e professor de Química, contou-me que anos atrás, quando a inflação era muito alta, ao comprar pneus novos para seu carro, precisou optar entre dois planos de pagamento:

1) 50% de desconto sobre o preço da tabela, para pagamento à vista;

2) 35% de desconto sobre o preço da tabela, para pagamento em 3 vezes.

O vendedor lhe mostrou a vantagem do segundo plano. Pagando em 3 vezes você está pagando 15% a mais. Em 3 meses, isto dá 5% ao mês, o que, para a época, era de fato um juro baixíssimo.

De imediato, meu colega percebeu que este raciocínio estava errado. Na verdade, o pagamento em 3 vezes, correspondia a um financiamento em 2 meses e não três. Precisamos perceber que uma das parcelas é entrada. Então o juro mensal seria 7,5% e não 5%.

Entretanto, este não é ainda o raciocínio correto. Usando sua calculadora financeira programável, meu colega concluiu que o juro mensal, embutido na segunda proposta de pagamento, era de cerca de 33%!!

Vamos raciocinar. Seja p o preço da tabela do pneu. No primeiro plano de pagamento ele pagaria $0{,}50p$; no segundo, pagaria $0{,}65p$, sendo $\dfrac{0{,}65p}{3}$ de entrada, uma primeira prestação de $\dfrac{0{,}65p}{3}$ e a segunda prestação de $\dfrac{0{,}65p}{3}$.

Após pagar a entrada ele fica devendo para a loja:

$$0{,}50p - \frac{0{,}65p}{3} = \frac{0{,}85p}{3}$$

Este é o valor efetivamente financiado: $\dfrac{0{,}85p}{3}$.

Se a taxa mensal de juros é j, então após um mês sua dívida passa a ser:

$$\frac{0{,}85p}{3} + \frac{0{,}85p}{3} \cdot j = (1+j) \cdot \frac{0{,}85p}{3}.$$

Aí ele paga a primeira prestação e fica devendo:

$$(1+j)\frac{0{,}85p}{3} - \frac{0{,}65p}{3}.$$

Após outro mês esta dívida passa a ser: $\left[(1+j)\dfrac{0{,}85p}{3} - \dfrac{0{,}65p}{3}\right](1+j)$

Então ele paga a segunda prestação e quita a dívida:

$$\left[(1+j)\frac{0{,}85\,p}{3}-\frac{0{,}65\,p}{3}\right](1+j)-\frac{0{,}65\,p}{3}=0.$$

Simplificando obtemos: $85(1+j)^2-65(1+j)-65=0$

ou seja, $17(1+j)^2-13(1+j)-13=0$.

Resolvendo esta equação do segundo grau, na incógnita $1+j$, e considerando apenas a raiz positiva obtemos:

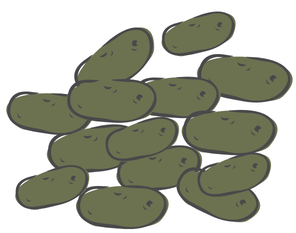
$$1+j\cong 1{,}3368$$

$$\text{donde } j\cong 0{,}3368=33{,}68\%$$

Para fazer justiça àquele comerciante, devo contar ainda que meu colega me disse: na conversa com o dono da loja ele pôde perceber que o mesmo não tinha consciência disto tudo. A defesa que fazia do segundo plano de pagamento, era, até certo ponto, sincera. Achava até que, neste segundo plano, estava perdendo dinheiro, em face de uma inflação muito alta. Sem perceber, ao invés de perder, ganhava, e muito, com ela. É claro que este comentário não se generaliza para todos os especuladores.

Um punhado de Feijões

Abdala Gannam



Para meu colega, Ronald Claver; um poeta dos melhores.

Quando menino, gostava de fazer adivinhações com números. Certa vez, estava eu a me "exibir", num desses armazéns comuns nas pequenas cidades do interior de Minas Gerais. Em meio à minha pequena platéia, estava sentado ao lado de um saco de feijões o dono do armazém, um velhote de setenta anos, aproximadamente, que me observava.

Não me lembro muito bem do que eu estava tentando adivinhar – talvez a idade de alguém, quem sabe –, quando o velhote colocou sobre o balcão um punhado de feijões, interrompendo-me para dizer:

– "Olha seu moço, não sei quantos feijões existem neste punhado".

Dizendo isto, virou-se de costas para o balcão onde estavam os feijões, falando-me:

– "Faça três monte de feijões, de maneira tal que os montes fiquem enfileirados e que em cada um tenha o mesmo número de feijões".

Calmamente assim o fiz, comunicando-lhe o cumprimento da tarefa, no que ele continuou a dizer:

–"Retire dos montes laterais, três feijões e os coloque no monte do meio".

Após alguns segundos respondi:

–"Tudo pronto"!

– "Agora, retire do monte do meio, tantos feijões quantos ficaram em um monte lateral, colocando-os em um qualquer dos montes laterais".

Assim o fiz, o velhote falou:

– “Ficaram 9 feijões no monte do meio”.

Contei e recontei os feijões do monte do meio e encontrando realmente nove, fiquei surpreso.

Várias vezes o truque foi repetido, variando os números de feijões que eram retirados dos montes extremos, o que resultava números diferentes no monte do meio.

A partir deste dia, passei algum tempo meditando sobre o que fazia o velhote e como conseguia dizer o número de feijões resultante no monte do meio, sem saber o número inicial de feijões. Depois de muito pensar, de ensaiar e errar, descobri, finalmente, que este número é múltiplo de três (assim, dizer para retirar 3 de cada extremo resultará ao final, 9 no monte do meio). Deste modo, o truque do punhado de feijões passou a integrar o meu repertório de adivinhações, o que me proporcionou muitas exibições.

Não satisfeito com a trivialidade do segredo que permite determinar o número de feijões do monte do meio, pensei na possibilidade de aumentar o número de montes em que os feijões poderiam ser divididos, o que tornaria mais difícil a descoberta do truque. Com este objetivo, fiz a seguinte tradução matemática do problema:

1º) Suponhamos que o punhado de feijões seja dividido em n montes ($n \geq 2$), contendo cada monte x feijões. (*)

2º) Chamemos o primeiro monte de a_1, o segundo de a_2, o terceiro de a_3, e assim por diante.

3º) Retiremos de cada monte (exceto de a_1) y feijões, que são colocados em a_i. Isto nos diz que o número N de feijões em a_1 será:

$$N = x + (n-1)\,y$$

4º) Retirando de a_i tantos feijões quantos os que ficaram em um qualquer dos outros montes, teremos:

$$N = x + (n-1)y - (x - y) = ny$$

* O truque pode ser feito também com dois montes, mas isto torna muito fácil sua descoberta.

Conclusão:

O número (N) de feijões contidos no monte a_1 será sempre o produto do número de montes (n) pelo número de feijões (y) que foi retirado de cada um dos outros montes.

Algum tempo depois, voltei ao armazém. Após certificar-me de que tinha uma platéia garantida, chamei o velhote, apanhei um bom punhado de feijões que coloquei sobre o balcão e de costas, disse:

– "Divida este punhado de feijões em tantos montes quantos o senhor queira, desde que sejam no mínimo três, e que estes montes fiquem enfileirados".

Depois de algum tempo o velhote disse:

– Pronto meu rapaz!

– Quantos montes foram obtidos?

– Sete, ao todo.

– Retire dois feijões de cada monte, colocando-os no quinto monte.

– Pronto.

– Retire do quinto monte tantos feijões quantos os que ficaram no primeiro monte, colocando-os no terceiro monte.

Após a resposta afirmativa do velhote, de que a última tarefa estava concluída, assumi uma aparência de convencimento, dizendo:

– Bem, ficaram seis feijões no quinto monte.

Após contá-los, o velhote disse:

– Não! Ficaram quatorze.

A partir daí, fui alvo de muitas galhofas. Não sei porque me veio à cabeça o número 6, em vez de 14. Talvez tenha sido o fato de muitas vezes ter feito o truque com três montes.

A propósito, esta foi minha última exibição.