

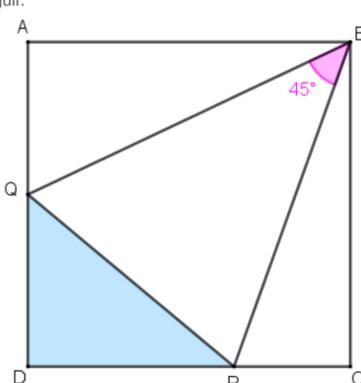
Problema para ajudar na escola: Perímetro de um triângulo



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Dado um quadrado $ABCD$, escolhemos um ponto P , no lado \overline{CD} , e um ponto Q , no lado \overline{DA} , de modo que o ângulo determinado pelos segmentos \overline{BP} e \overline{BQ} meça 45° , conforme ilustra a figura a seguir.



Se o comprimento de cada lado do quadrado $ABCD$ é x , qual é o perímetro do triângulo PDQ em função de x ?

Lembrete e Notações

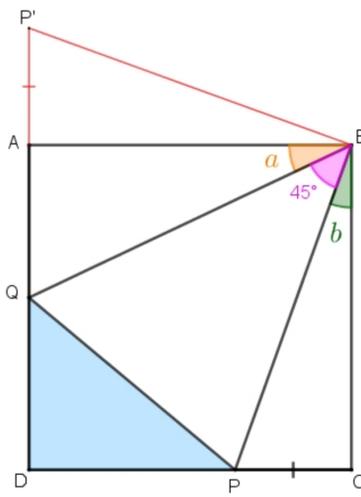
- Caso de congruência de triângulos L.A.L. (lado – ângulo – lado):** Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo por eles definido, então estes triângulos são congruentes. (Se você não se lembra desse resultado, clique [AQUI](#)).
- Denotaremos o segmento de reta definido por dois pontos, digamos X e Y , por \overline{XY} e seu respectivo comprimento por XY .

Solução

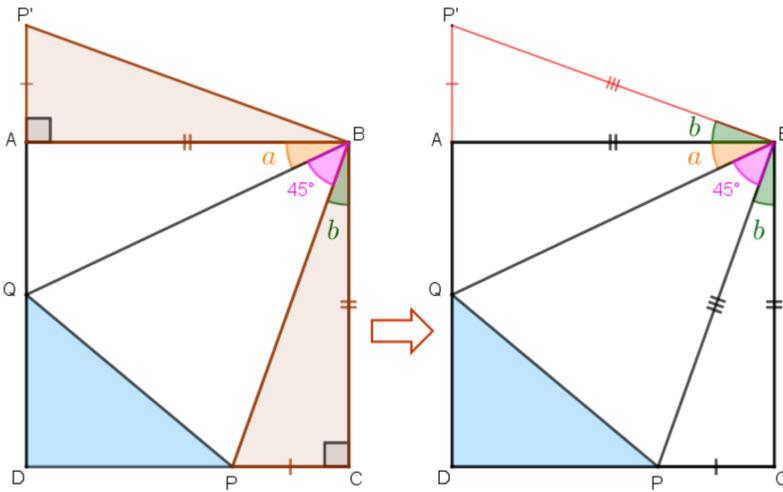
Denotaremos as medidas em graus dos ângulos \hat{ABQ} e \hat{PBC} por a e b , respectivamente.

Inicialmente, observamos que $a + 45^\circ + b = 90^\circ$; assim, $a + b = 45^\circ$.

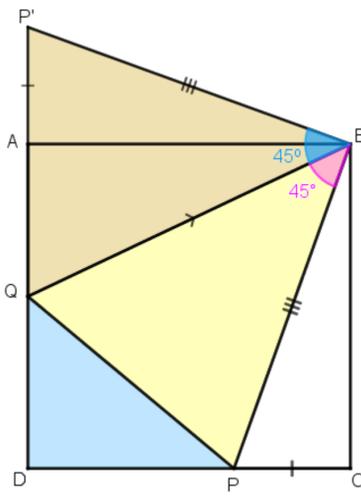
Agora, no prolongamento do segmento \overline{AD} vamos tomar o ponto P' tal que $AP' = CP$ e construir o triângulo BAP' , conforme indica a figura a seguir.



Como $ABCD$ é um quadrado, pelo **Caso de congruência de triângulos L.A.L.** os triângulos BAP' e BPC são congruentes e, portanto, $BP' = BP$ e a medida do ângulo \hat{ABP}' é b .



Como sabemos que $a + b = 45^\circ$, o **Caso de congruência de triângulos L.A.L.** também garante a congruência dos triângulos QBP e QBP' .



Com isso, concluímos que $PQ = P'Q$ e já podemos, finalmente, calcular o perímetro *Perim* do triângulo PDQ :

$$\begin{aligned}
 \textit{Perim} &= QD + DP + PQ \\
 &= QD + DP + P'Q \\
 &= QD + DP + (P'A + AQ) \\
 &= (AQ + QD) + DP + P'A \\
 &= AD + DP + P'A \\
 &= AD + DP + PC \\
 &= AD + DC \\
 &= x + x = 2x.
 \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo PDQ é $2x$.

Um applet para ajudar

Instruções:

- Movimente os pontos P e Q até obter um ângulo \hat{QBP} de 45° , como previsto no problema. Definido esse ângulo, compare a sua resposta com a resposta do applet, observando que no applet construímos um quadrado com lados medindo $x = 5$.
- Para movimentar o ponto P (ou o ponto Q), basta clicar sobre ele com o botão esquerdo do mouse, manter o botão pressionado e fazer o movimento.

Clique AQUI para abrir o applet.

OBMEP_srdg, criado com o GeoGebra

Dica: Você poderá fazer um movimento "mais fino" dos pontos P e Q utilizando seu teclado. Para isso:

- Clique sobre P com o botão esquerdo do mouse. Em seguida, mantenha a tecla Shift do teclado apertada e faça os movimentos utilizando as teclas "mover para direita" e "mover para esquerda".
- Clique sobre Q com o botão esquerdo do mouse. Em seguida, mantenha a tecla Shift do teclado apertada e faça os movimentos utilizando as teclas "mover para cima" e "mover para baixo".

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.