.Problema para ajudar na escola: Duas rodas girando

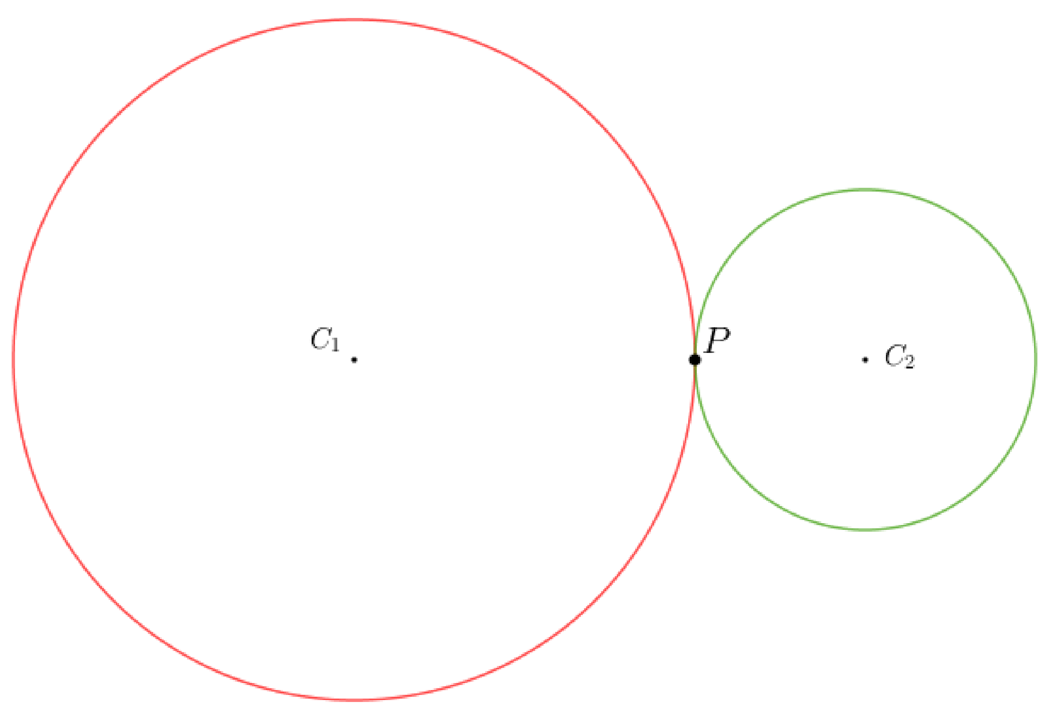
Problema

(A partir do 9º ano do E. F. – Nível de dificuldade: Médio)

(**ONEM 2009** – Adaptado) Na figura vemos as Rodas 1 e 2 girando.
Observe que, enquanto a Roda 1 gira 120°, a Roda 2 gira 2π radianos.

Clique AQUI e veja um GIF ANIMADO.

Quantos centímetros mede o raio da Roda 1, se a distância entre os dois centros C_1 e C_2 é 160 cm?
Considere que as circunferências que definem as duas rodas são tangentes externas.



Ajuda

A um arco de circunferência podemos associar duas medidas distintas:

- a sua medida angular (em graus ou radianos), α;
- a sua medida linear (em unidades de comprimento), c.

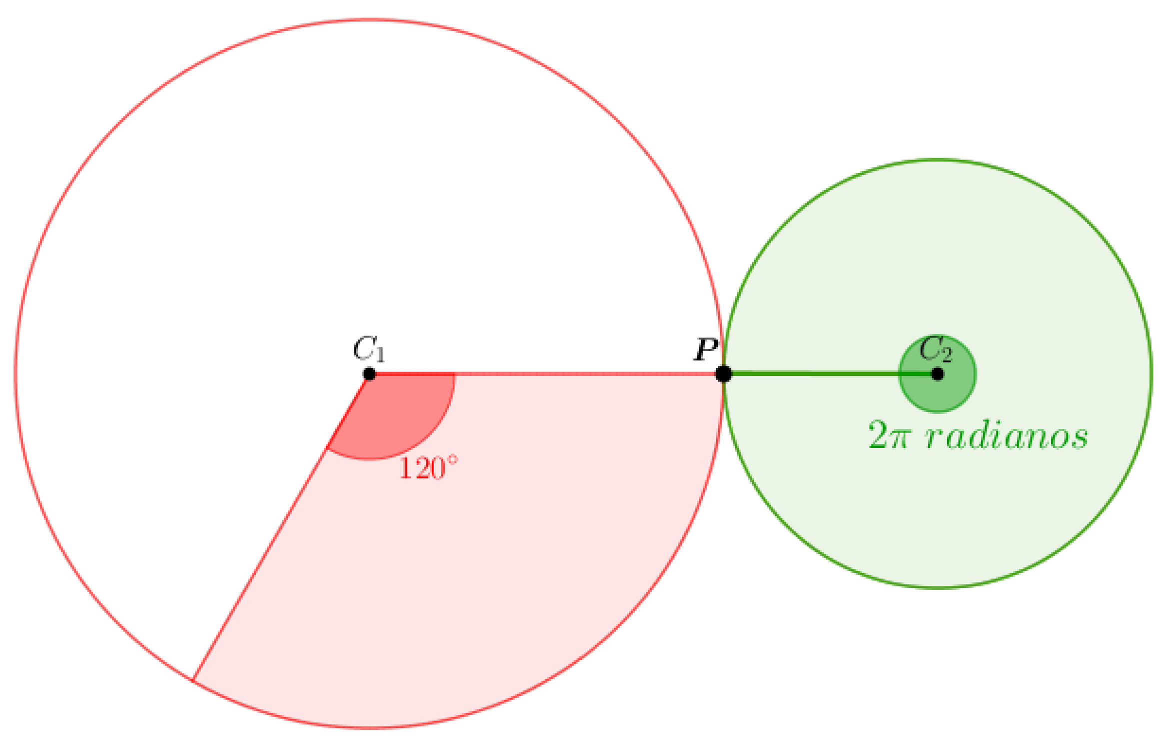
Conhecida uma delas, a outra pode ser obtida a partir da medida angular e do comprimento da circunferência que define o arco por meio de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi\, r & \text{———————} & 360^\circ \\ c & \text{———————} & \alpha \end{array}$$

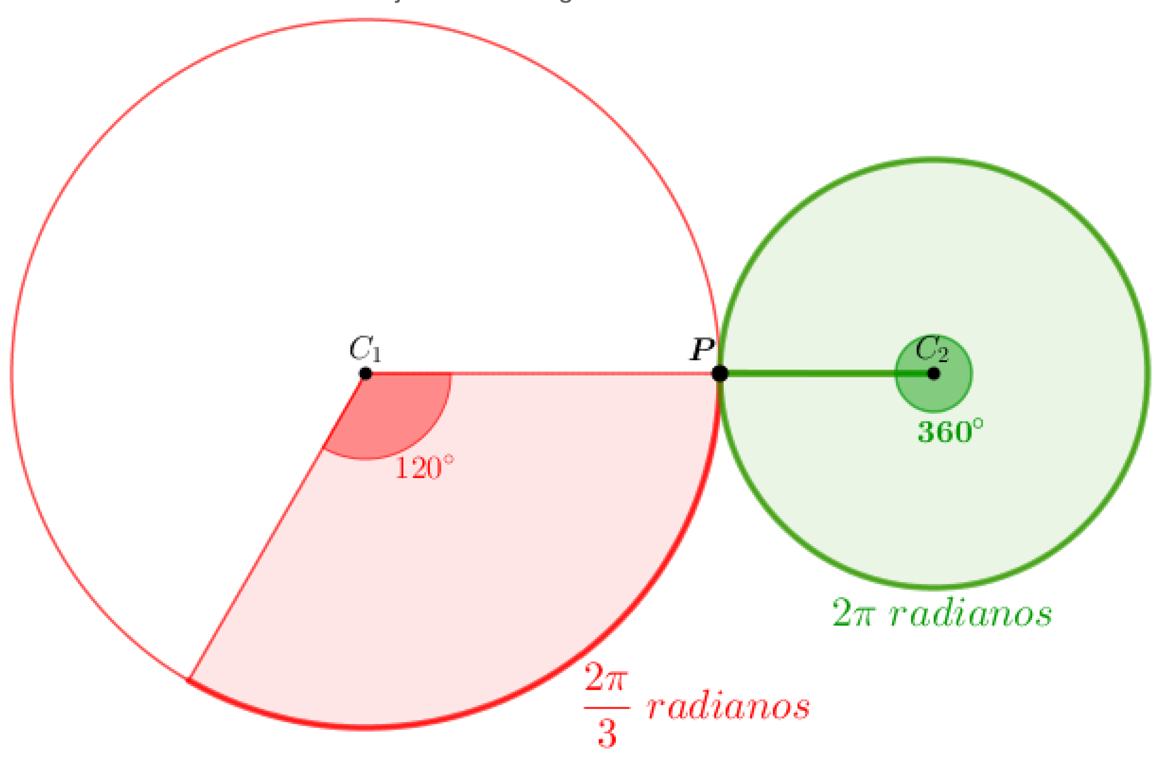
Se você não se lembra disso, não faz mal: clique **AQUI**.

Solução

Após um giro de 120° da Roda 1 a partir do ponto de tangência P, obtemos a imagem abaixo.



Como a Roda 1 girou 120° e a Roda 2 girou 2π radianos, a partir do ponto P ficam definidos um arco na circunferência da Roda 1 cuja medida angular é 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ radianos e um arco na circunferência da Roda 2 cuja medida angular é 360° ou 2π radianos.



Mas, observe que:

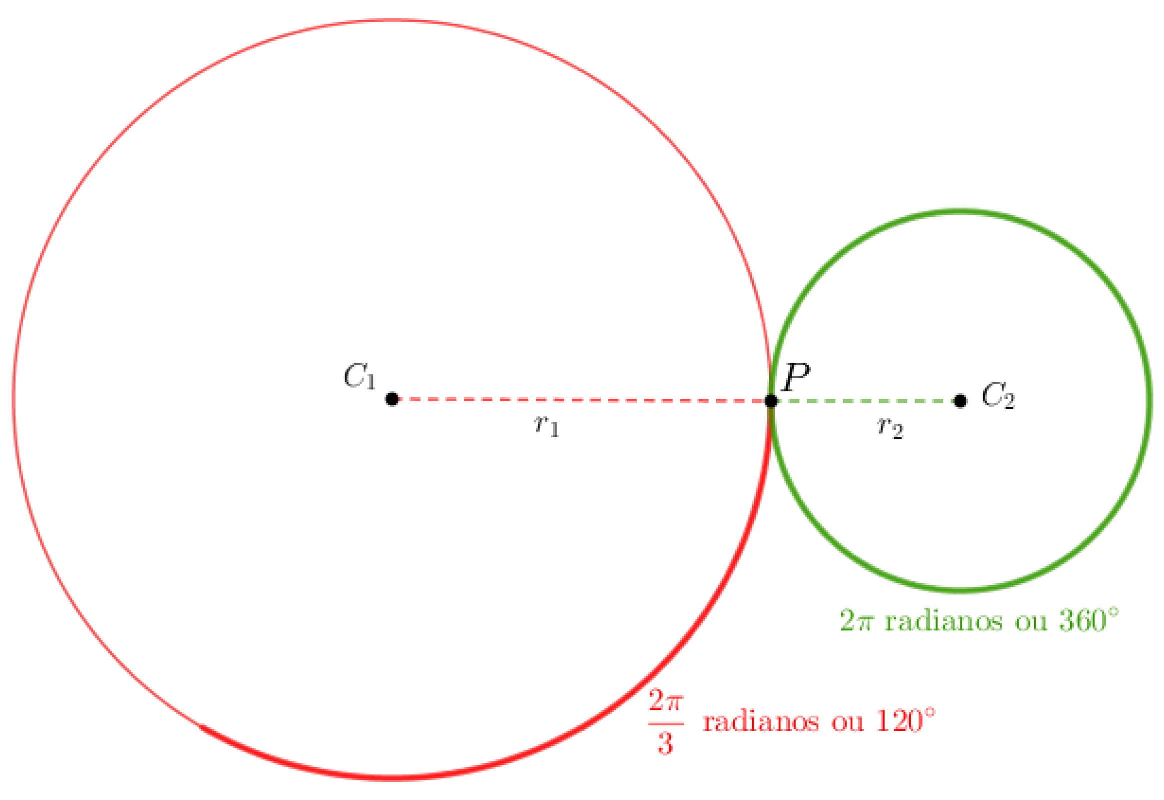
- a cada giro de 120° da Roda 1, cada ponto do arco de $\frac{2\pi}{3}$ radianos esteve em contato com o ponto de tangência P,
- a cada giro de 360° da Roda 2, cada ponto do arco de 2π radianos esteve em contato com o ponto de tangência P,

portanto, **os dois arcos têm o mesmo comprimento, ou seja, a mesma medida linear**. $\qquad (i)$
Se você não conseguiu visualizar as duas afirmações que deram origem à conclusão de que **os arcos descritos nas duas rodas têm o mesmo comprimento**, utilize o applet abaixo disponibilizado. É só abrir o aplicativo, movimentar manualmente os botões identificados com as letras gregas α e θ e observar.

Clique AQUI para abrir o applet.

OBMEP_ srdg, aplicativo criado com o GeoGebra

Vamos, então, calcular as medidas linearesdos dois arcos. Para isso, considere r_1 e r_2 os raios das circunferências, conforme ilustra a figura a seguir, e sejam c_1 e c_2 os comprimentos em centímetros dos arcos de $\frac{2\pi}{3}$ radianos e 2π radianos, respectivamente.



- Medida linear c_1

  Usando a regrinha de três mostrada na **Ajuda**, segue que:

  $$\begin{array}{ccc} 2\pi\, r_1 & \text{————} & 360^\circ \\ c_1 & \text{————} & 120^\circ \end{array}$$

  donde

  $$c_1 = 2\pi\, r_1 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi\, r_1}{3}.$$

- Medida linear c_2

  Usando a regrinha de três mostrada na **Ajuda**, segue que:

  $$\begin{array}{ccc} 2\pi\, r_2 & \text{————} & 360^\circ \\ c_2 & \text{————} & 360^\circ \end{array}$$

  donde

  $$c_2 = 2\pi\, r_2 \times \frac{360^\circ}{360^\circ} = 2\pi\, r_2.$$

Mas, por (i), $c_1 = c_2$, logo:
$$\frac{2\pi\, r_1}{3} = 2\pi\, r_2$$
e, assim,
$$\boxed{r_1 = 3r_2}. \qquad (ii)$$
Mas lembre-se de que a distância entre os dois centros C_1 e C_2 é 160 cm; portanto:
$$\boxed{r_1 + r_2 = 160}. \qquad (iii)$$
Veja que, de (ii) e (iii), segue que:
$$r_1 + r_2 = 160$$
$$3r_2 + r_2 = 160$$
$$4r_2 = 160$$
$$\boxed{r_2 = 40}.$$
Substituindo esse valor em (ii), obtemos que $\boxed{r_1 = 120}$.
Então, o raio da Roda 1 é $\boxed{120\text{ cm}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube: **Faapers**.