.Problema para ajudar na escola: Área de um losango

Problema

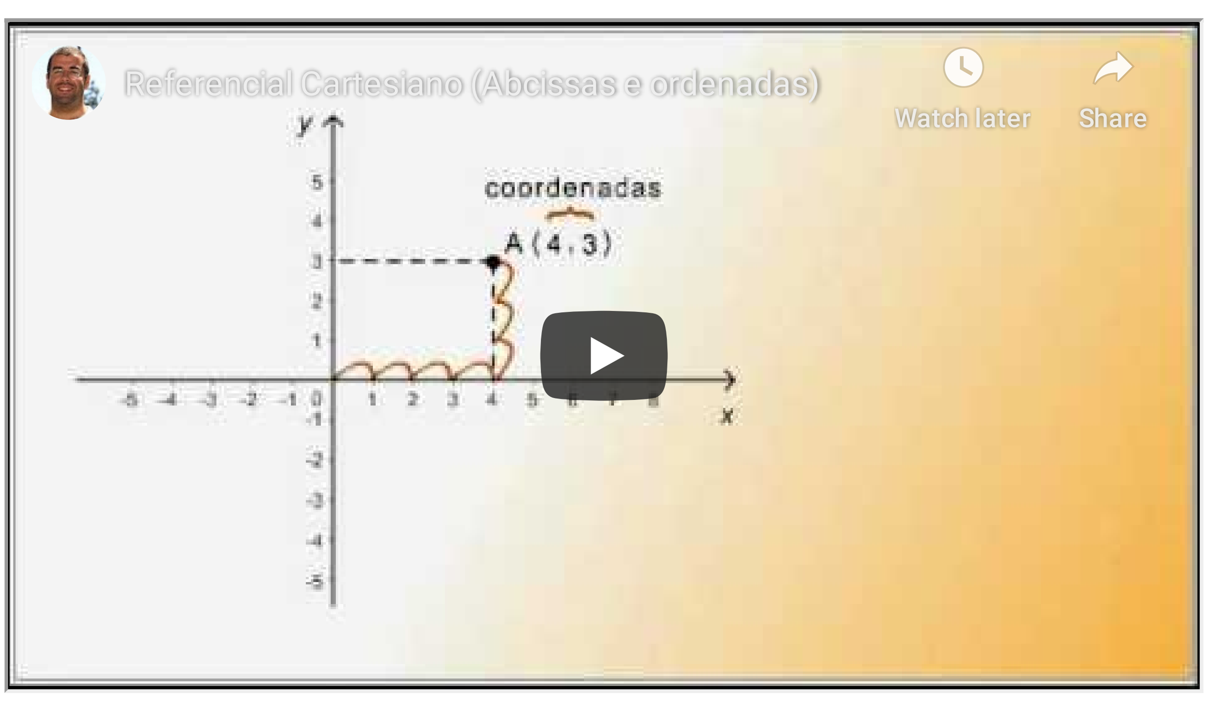
(A partir da 3ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Médio)

Determinar a área do losango ***ABCD*** sabendo que as coordenadas dos vértices **A**, **B** e **C** em um mesmo plano cartesiano xOy são dadas por:

- **A=(10,3)** ; **B=(5,3)** e **C=(2,-1)**.

AJUDA

Para resolver este problema vamos utilizar noções básicas de plano cartesiano.
Talvez o vídeo abaixo possa ajudar!



Referencial Cartesiano (Abcissas e ordenadas)

Lembretes e notações

Em um plano cartesiano xOy, considere os pontos $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$.

(1) A distância entre os pontos A e B, denotada por d_{AB}, é definida por:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\ .$$

(2) O ponto médio dos pontos A e B, denotado por M_{AB}, é o ponto definido por:

$$M_{AB}=\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

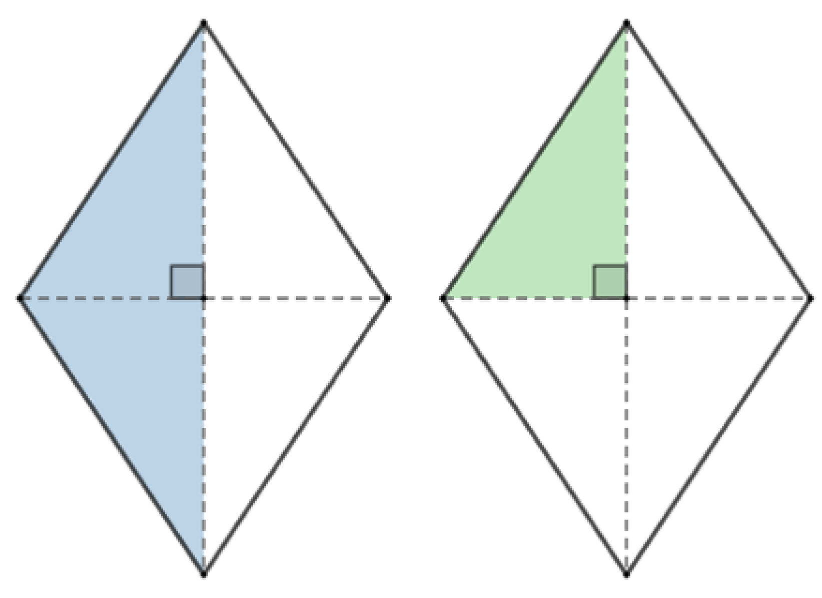
(3) Um losango possui os quatro lados congruentes.

(4) Em todo losango, as diagonais intersectam-se perpendicularmente nos respectivos pontos médios.

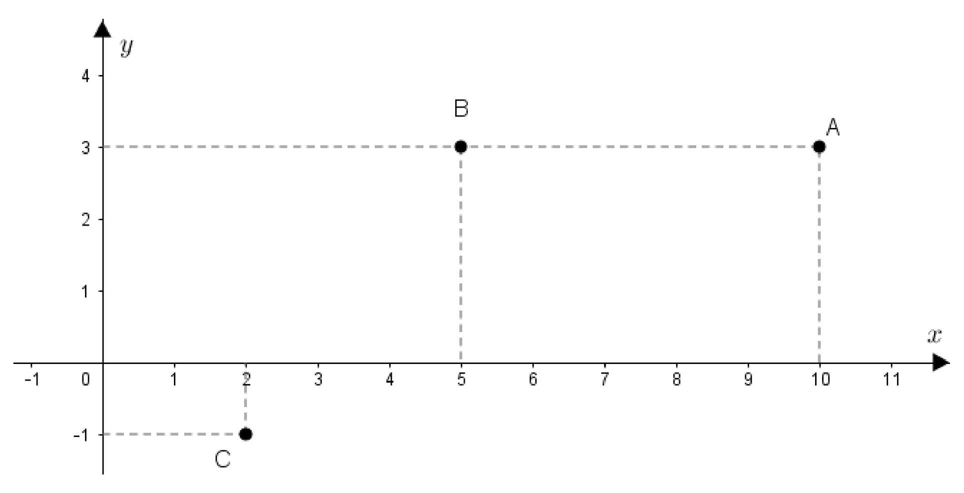
Denotaremos o segmento de reta definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e seu respectivo comprimento por XY.

Solução

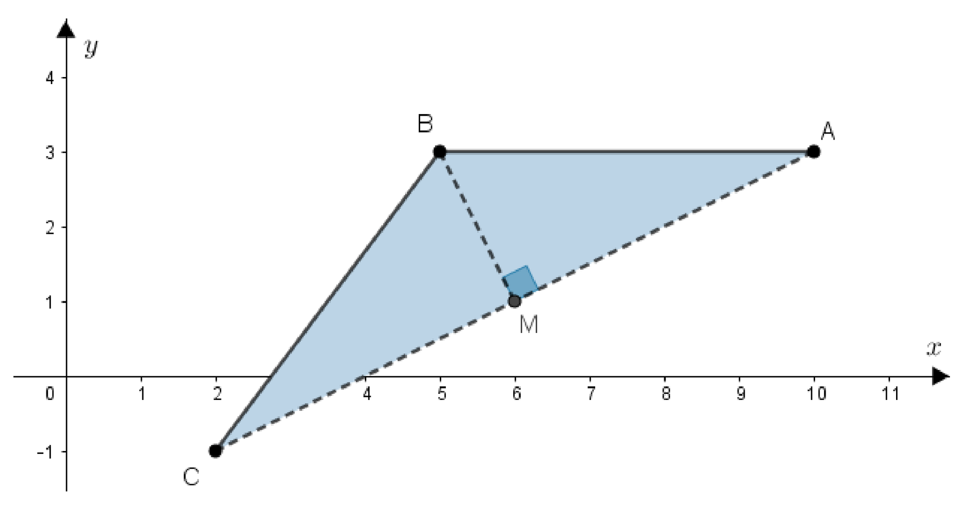
A partir dos **Lembretes (3) e (4)**, podemos decompor um losango em quatro triângulos retângulos congruentes ou em dois triângulos, não necessariamente retângulos, congruentes, conforme ilustram as duas imagens a seguir.



Dessa forma, sequer precisamos do quarto vértice do paralelogramo do problema para calcular a sua área. Assim, vamos inicialmente fixar um plano cartesiano xOy e representar os pontos A, B e C para melhor visualizarmos a solução.



I – Vamos determinar o ponto médio comum das duas diagonais do losango utilizando os vértices A e C, para podermos calcular a altura do triângulo ABC. A área do losango será, então, duas vezes a área desse triângulo.



- Ponto médio da diagonal $\overline{AC}$:

$$M_{AC}=\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ,\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$$
$$M_{AC}=\left(\frac{10+2}{2}\ ,\ \frac{3-1}{2}\right)$$
$$M_{AC}=(6\ ,\ 1)\ .$$

Vamos agora determinar os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BM}$, respectivamente, base e altura do triângulo ABC .

- Comprimento do segmento $\overline{AC}$:

$$d_{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}$$
$$d_{AC}=\sqrt{(10-2)^2+(3-(-1))^2}$$
$$d_{AC}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}$$
$$d_{AC}=\sqrt{80}\ .$$

- Comprimento do segmento $\overline{BM}$:

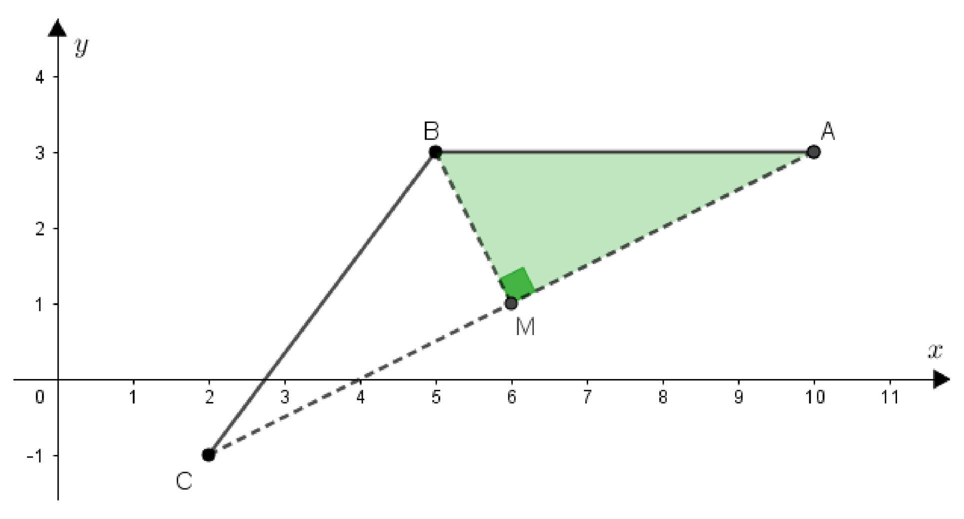
$$d_{BM}=\sqrt{(x_B-x_M)^2+(y_B-y_M)^2}$$
$$d_{BM}=\sqrt{(5-6)^2+(3-1)^2}$$
$$d_{BM}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}$$
$$d_{BM}=\sqrt{5}\,.$$

- Área do triângulo ABC:

$$S_{ABC}=\frac{base\times altura}{2}$$
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{80}\ \times\sqrt{5}}{2}$$
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{400}}{2}$$
$$S_{ABC}=10.$$

Portanto, a área do losango $ABCD$ é $\boxed{2\times 10=20}$ unidades de área.

II – Vamos utilizar o ponto médio comum das duas diagonais do losango já calculado, $M_{AC}=(6\ ,\ 1)$, para calcularmos a medida do cateto $\overline{MA}$ do triângulo retângulo BMA . A medida de $\overline{MB}$ já está calculada: $d_{BM}=\sqrt{5}$. A área do losango será, dessa vez, quatro vezes a área desse triângulo.



- Comprimento do segmento $\overline{MA}$:

$$d_{MA}=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$$
$$d_{MA}=\sqrt{(6-10)^2+(1-3)^2}$$
$$d_{MA}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}$$
$$d_{MA}=\sqrt{20}\ .$$

- Área do triângulo BMA:

$$S_{BMA}=\frac{base\times altura}{2}$$
$$S_{BMA}=\frac{\sqrt{20}\ \times\sqrt{5}}{2}$$
$$S_{BMA}=\frac{\sqrt{100}}{2}$$
$$S_{BMA}=5.$$

Portanto, a área do losango $ABCD$ é $\boxed{4\times 5=20}$ unidades de área.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.