.Problema para ajudar na escola: Um sistema diferente

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Muito Difícil**)**

Determine os pares ordenados (x,y) de números reais positivos que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^3 \\ y^{x+y}=x^6\cdot y^3 \end{cases}.$$

Adaptado da **V ONEM**, 2008.

Solução

Sejam x e y números reais positivos tais que

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^3 & (i) \\ y^{x+y}=x^6\cdot y^3 & (ii) \end{cases}.$$

Multiplicando as duas equações que compõem esse sistema obtemos:

$$x^{x+y}\cdot y^{x+y}=y^3\cdot\left(x^6\cdot y^3\right)$$
$$(x\cdot y)^{(x+y)}=x^6\cdot\left(y^3\cdot y^3\right)$$
$$(x\cdot y)^{(x+y)}=x^6\cdot y^6$$
$$(x\cdot y)^{(x+y)}=(x\cdot y)^6\,.$$

Como x e y são não nulos, segue que:

$$\frac{(x\cdot y)^{(x+y)}}{(x\cdot y)^6}=1$$
$$(x\cdot y)^{(x+y)-6}=1$$
$$(x\cdot y)^{x+y-6}=1\,.$$

Assim, temos uma "potência com base positiva igual a 1"; isso significa que a base é 1 ou o expoente é 0. Analisemos os dois casos.

- $x\cdot y=1$

  Neste caso, $x=\dfrac{1}{y}=y^{-1}$; substituindo essa expressão em (i), segue que:

  $$x^{x+y}=y^3$$
  $$\left(y^{-1}\right)^{(x+y)}=y^3$$
  $$y^{-(x+y)}=y^3\,.$$

  A última igualdade nos possibilita duas conclusões: "os expoentes $-(x+y)$ e 3 são iguais" ou "$y=1$".

  Mas perceba que, como x e y são positivos, $x+y$ é positivo e, então, $-(x+y)$ é negativo. Logo, os expoentes não são iguais e consequentemente $y=1$. Como $x\cdot y=1$, temos $x=1$.

  Portanto, este caso fornece uma única solução para o problema: $\boxed{(x,y)=(1,1)}$.

- $x+y-6=0$

  Neste caso, $x+y=6$; substituindo essa expressão em (i), segue que:

  $$x^{x+y}=y^3$$
  $$x^6=y^3$$
  $$\sqrt[3]{x^6}=\sqrt[3]{y^3}$$
  $$x^2=y\,.$$

  Como $x+y-6=0$, temos que

  $$x+x^2-6=0$$
  $$x^2+x-6=0\,.$$

  Para resolver essa equação quadrática, calculamos o discriminante $\Delta=1^2+4\cdot 6=1+24=25$ e obtemos:

  $$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$
  $$x_1=\frac{-1+5}{2}\text{ ou }x_2=\frac{-1-5}{2}$$
  $$x_1=2\text{ ou }x_2=-3\,.$$

  Mas x é um valor positivo; logo, $x=2$.

  Como $x+y-6=0$, concluímos que $y=4$ e este caso também fornece uma única solução para o problema: $\boxed{(x,y)=(2,4)}$.

Logo, existem apenas dois pares ordenados de números reais positivos que satisfazem o sistema de equações apresentado no problema: $\boxed{(1,1)\text{ e }(2,4)}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.