.Problema para ajudar na escola: Um balão preso

Problema

(A partir da 1ª série do E. M. – Nível de dificuldade: Médio**)**

Um balão está preso ao solo por dois cabos de aço em dois pontos que se distanciam entre si de 60 metros. Os dois cabos estão completamente esticados, sendo que o cabo mais curto mede 80 m e o ângulo que o outro cabo faz com o solo mede 30°.

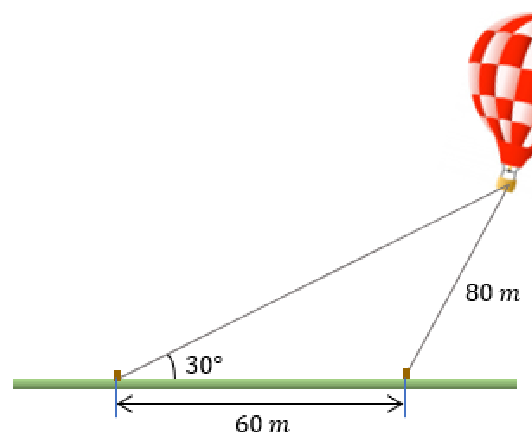
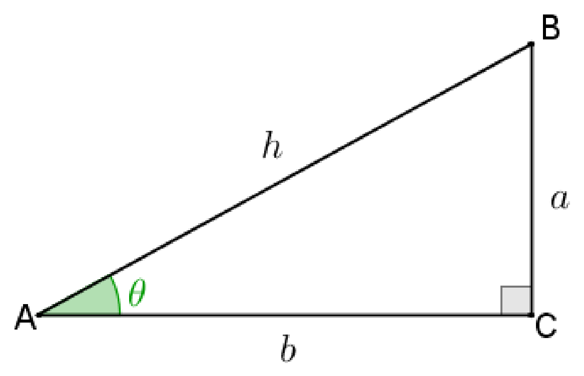


Imagem do balão extraída de Freepik

(a) Qual o comprimento do cabo mais longo?
(b) No momento descrito pelos dados, a que altura o balão está do solo?

Ajuda



Definição: Seja ACB um triângulo retângulo com catetos e hipotenusa com comprimentos a, b, h, respectivamente. Seja θ a medida em graus de um dos ângulos agudos desse triângulo, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Chamamos de *tangente de* θ, e denotamos por $tg\,\theta$, a razão entre os comprimentos dos catetos oposto e adjacente a θ: $\boxed{tg\,\theta = \frac{a}{b}}$.

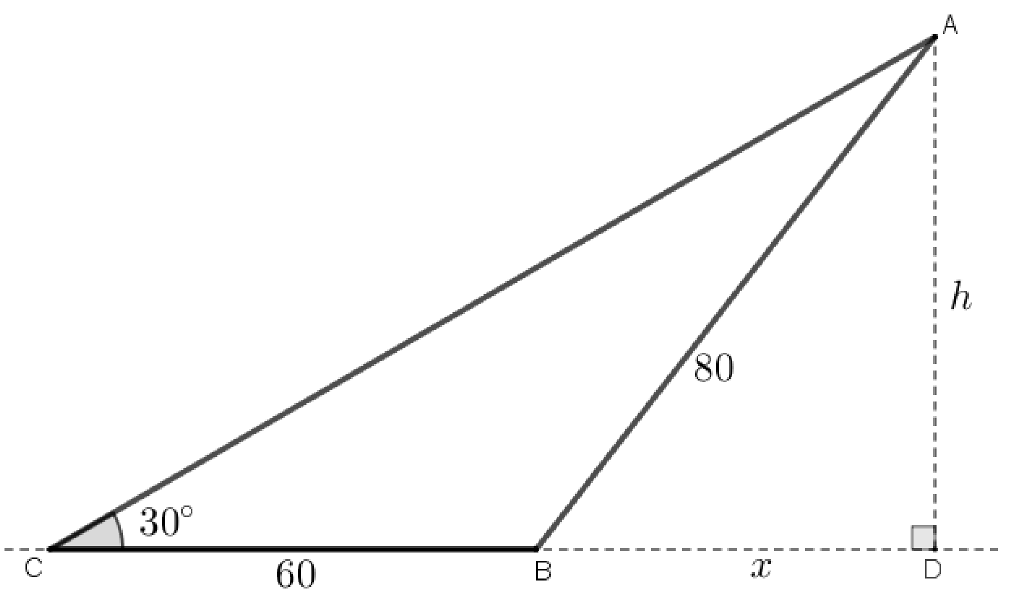
No estudo da trigonometria, alguns ângulos são bastante utilizados e devido à frequência com que eles surgem em problemas e à importância que eles têm para a Geometria são denominados **ângulos notáveis** ou **ângulos especiais** ou, ainda, **ângulos fundamentais**. São eles os ângulos com medidas iguais a: 30°, 45° e 60°. As tangentes desses ângulos são:

$$tg\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad tg\,45^\circ = 1 \quad ; \quad tg\,60^\circ = \sqrt{3}\,.$$

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Solução

A partir dos dados do problema, definimos o triângulo ABC e traçamos o segmento AD, ortogonal ao segmento CB, conforme mostra a figura a seguir.
Denotamos por h o comprimento em metros do segmento AD – altura em que se encontra o balão – e por x o comprimento em metros do segmento BD – distância entre o pé da perpendicular e o ponto do solo no qual está preso o cabo mais curto.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABD, obtemos que

$$x^2 + h^2 = 80^2. \qquad (i)$$

Por outro lado, olhando o triângulo ADC, observamos que $tg\,30^\circ = \dfrac{h}{60+x}$ e, portanto, segue que:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{60+x}$$

$$h = (60+x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (ii)$$

Dessa forma, substituindo (ii) em (i) segue que:

$$x^2 + \left((60+x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 80^2$$

$$x^2 + (60+x)^2\cdot\frac{3}{9} = 6400$$

$$x^2 + \left(3600+120x+x^2\right)\cdot\frac{1}{3} = 6400$$

$$3x^2 + \left(3600+120x+x^2\right) = 3\cdot 6400$$

$$4x^2 + 3600 + 120x = 19200$$

$$4x^2 + 120x - 15600 = 0.$$

Dividindo a última igualdade por 4 ficamos com a equação $\boxed{x^2+30x-3900=0}$ cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{900+15600}}{2}$$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{16500}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-30+\sqrt{16500}}{2} \;\text{ e }\; x_2 = \frac{-30-\sqrt{16500}}{2}.$$

Vemos que $x_2 < 0$; logo, essa raiz não pode ser solução do problema, já que estamos procurando um comprimento e, portanto, um valor positivo.
Então,

$$x = \frac{-30+\sqrt{16500}}{2} \approx 49,23\text{ m}$$

e, consequentemente, por (ii):

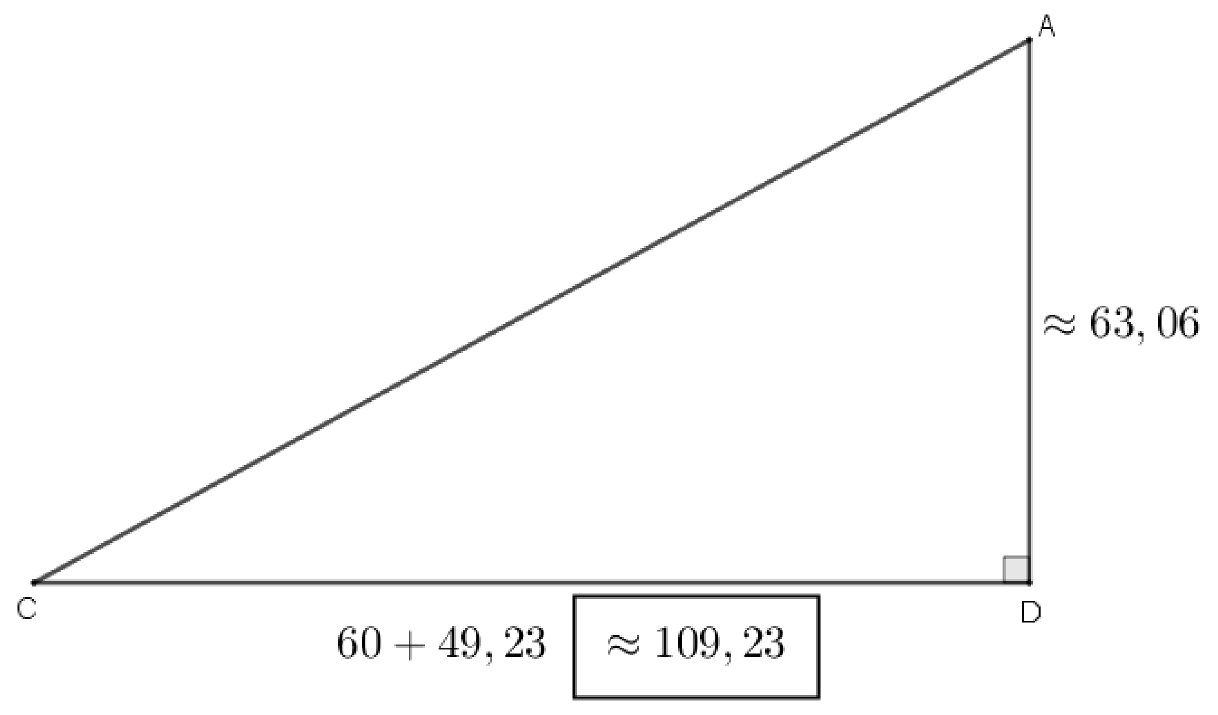
$$h = (60+x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h \approx (60+49,23)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h \approx (109,23)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$h \approx 63,06\text{ m}.$$

A partir do triângulo ADC, mostrado na figura a seguir com as medidas que acabamos de calcular, já temos condições de responder os dois itens do problema.



(a) Para calcularmos o comprimento do cabo mais longo, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo ADC, lembrando que estamos trabalhando com medidas aproximadas.
Assim, se z é a medida em metros do cabo mais longo, então o comprimento do segmento AC é z e, com isso:

$$z^2 \approx 109,23^2 + 63,06^2$$

$$z^2 \approx 15907,76$$

$$z \approx 126,13\,.$$

Pelo exposto, o comprimento do cabo mais longo é aproximadamente $\boxed{126,13\text{ m}}$.

(b) Observamos diretamente na figura acima que, no momento descrito pelos dados, o balão está a uma altura do solo de aproximadamente $\boxed{63,06\text{ m}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.