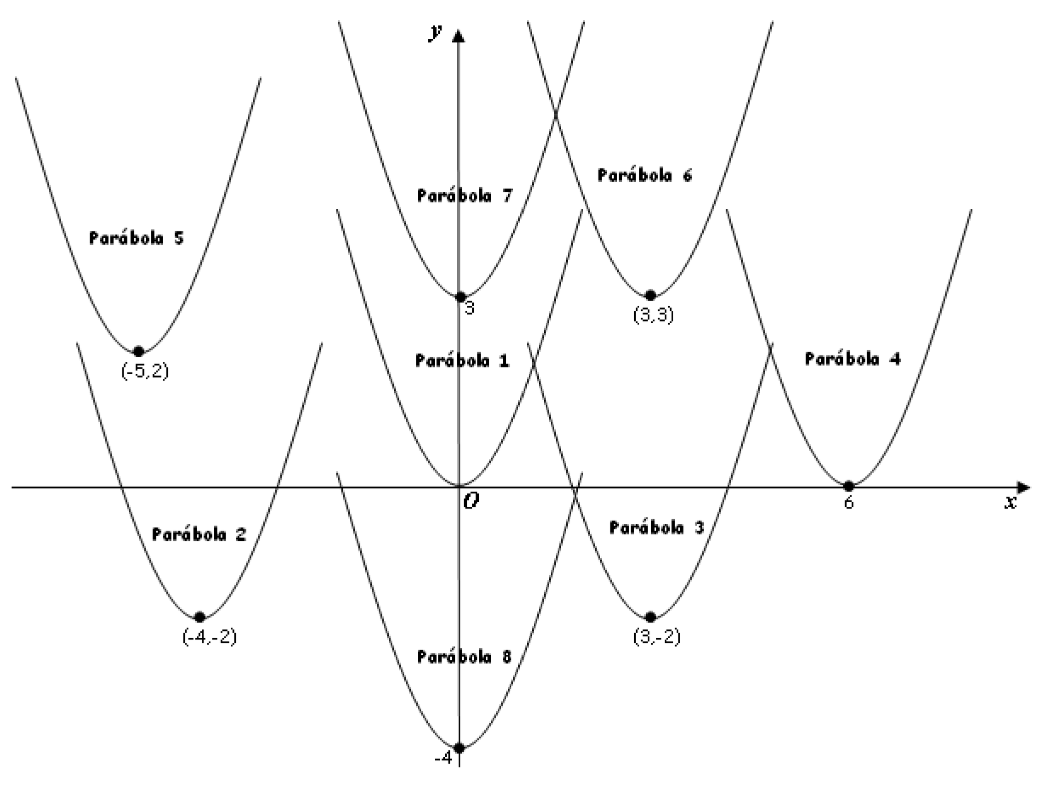
.Problema para ajudar na escola: Muitas parábolas!

Problema

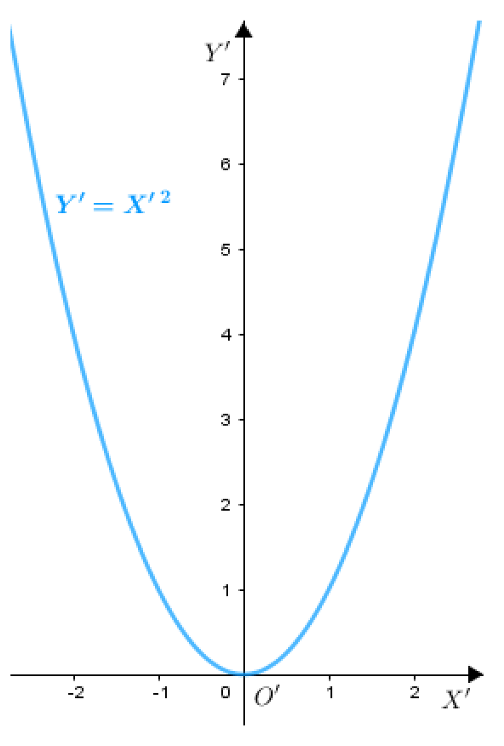
(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Médio**)**

Determine as equações das parábolas esboçadas na figura a seguir, a partir de um plano cartesiano xOy, sabendo-se que elas são translações da **Parábola 1**, cuja equação é $y = x^2$, e que os pontos destacados são os respectivos vértices.



Lembretes

(1) No plano cartesiano $X'O'Y'$, a equação $Y' = X'^{\,2}$ define uma parábola, com concavidade voltada para cima, cujo vértice é a origem do sistema e cujo eixo de simetria é o eixo $O'Y'$.



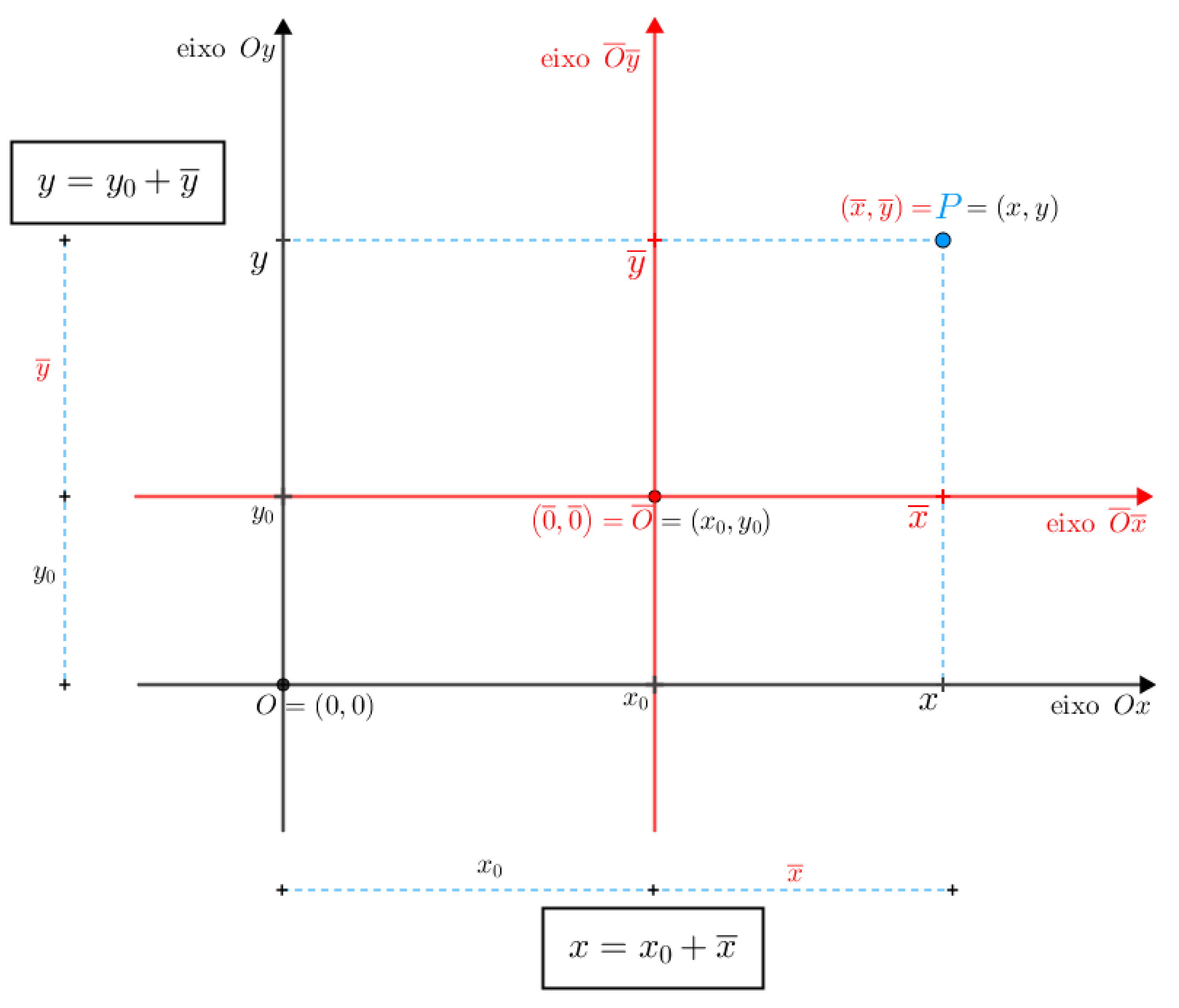
(2) **Translação de eixos coordenados**

- Sejam xOy um sistema de eixos ortogonais e $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto desse plano.
- Seja $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ um sistema de eixos cujos eixos $\overline{O}\overline{x}$ e $\overline{O}\overline{y}$ são paralelos aos eixos Ox e Oy, respectivamente.

Se (x, y) são as coordenadas de um ponto P no sistema xOy e $(\overline{x}, \overline{y})$ são as coordenadas desse mesmo ponto P no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, então essas coordenadas estão assim relacionadas:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \overline{x} \\ y = y_0 + \overline{y} \end{cases}}\ .$$

Se você não se lembra dessas relações, disponibilizamos a figura abaixo para ajudar.



Solução

Para cada parábola, a partir da segunda, vamos fazer uma translação do sistema de eixos xOy para um sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ no qual a origem $\overline{O}$ seja o vértice dessa parábola. No novo sistema, a parábola em questão terá como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$; como conhecemos as coordenadas do vértice dessa parábola no sistema original xOy, a partir das equações de translação, conseguiremos escrever sua equação no sistema xOy.

- **Parábola 2:**

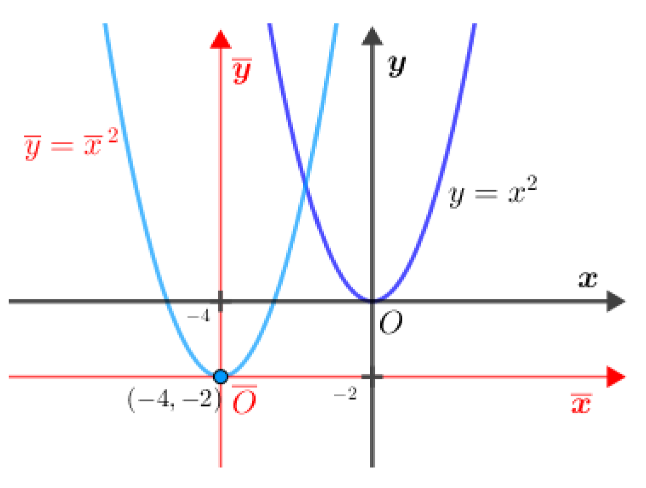
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 2 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - (-4) = x + 4 \\ \overline{y} = y - (-2) = y + 2 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 2 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y + 2 = (x + 4)^2$$
$$y = (x + 4)^2 - 2$$
$$\boxed{y = x^2 + 8x + 14}\,.$$



- **Parábola 3:**

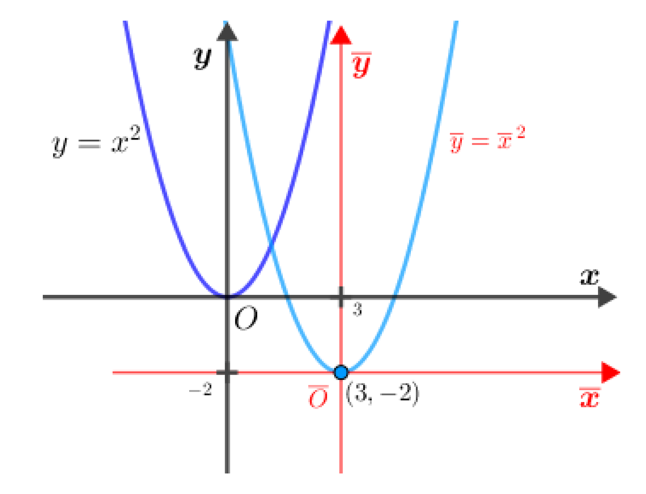
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 3 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 3 \\ \overline{y} = y - (-2) = y + 2 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 3 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y + 2 = (x - 3)^2$$
$$y = (x - 3)^2 - 2$$
$$\boxed{y = x^2 - 6x + 7}\,.$$



- **Parábola 4:**

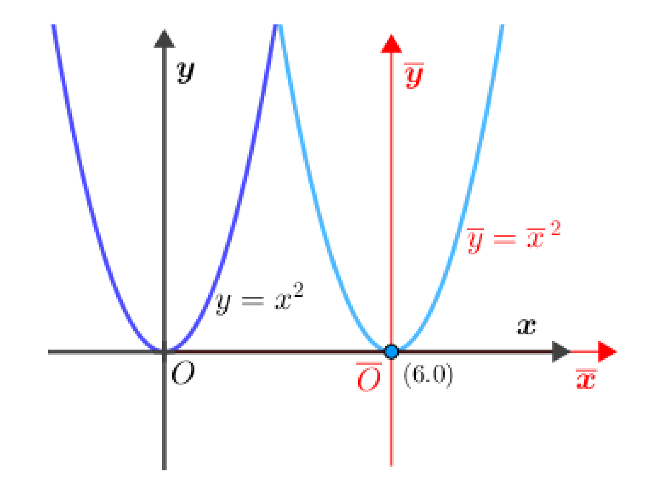
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 4 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 6 \\ \overline{y} = y - 0 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 4 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y - 0 = (x - 6)^2$$
$$y = (x - 6)^2$$
$$\boxed{y = x^2 - 12x + 36}\,.$$



- **Parábola 5:**

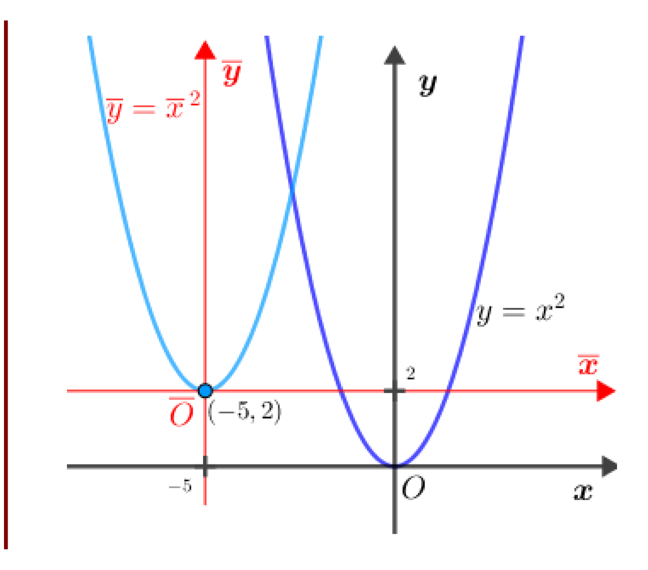
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 5 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - (-5) = x + 5 \\ \overline{y} = y - 2 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 5 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y - 2 = (x + 5)^2$$
$$y = (x + 5)^2 + 2$$
$$\boxed{y = x^2 + 10x + 27}\,.$$



- **Parábola 6:**

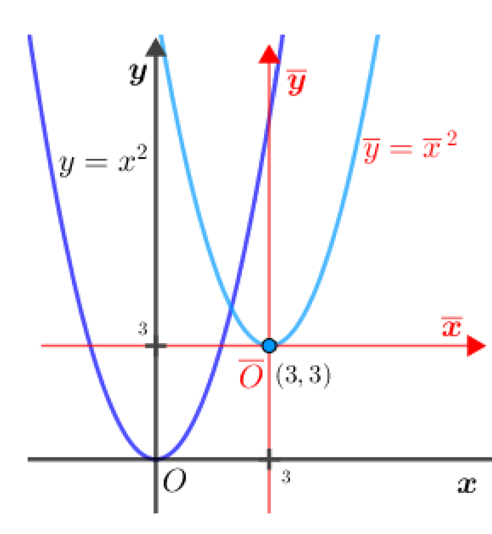
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 6 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 3 \\ \overline{y} = y - 3 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 6 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y - 3 = (x - 3)^2$$
$$y = (x - 3)^2 + 3$$
$$\boxed{y = x^2 - 6x + 12}\,.$$



- **Parábola 7:**

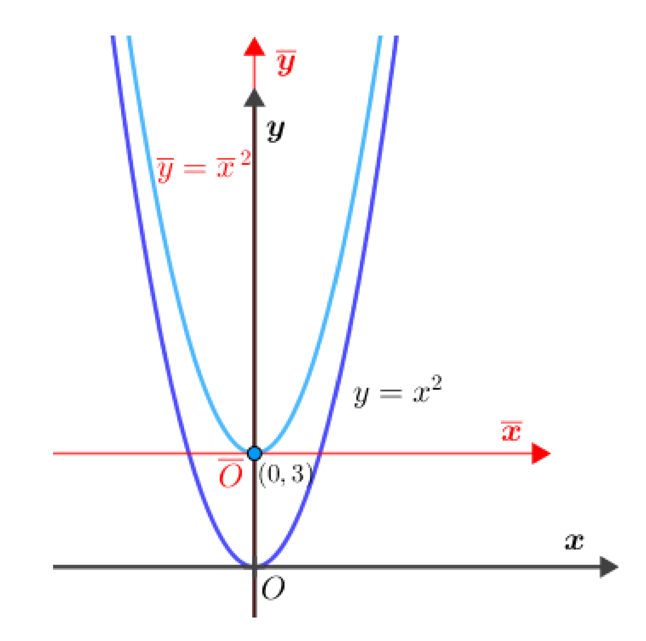
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 7 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 0 \\ \overline{y} = y - 3 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 7 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y - 3 = (x - 0)^2$$
$$y = (x - 0)^2 + 3$$
$$\boxed{y = x^2 + 3}\,.$$



- **Parábola 8:**

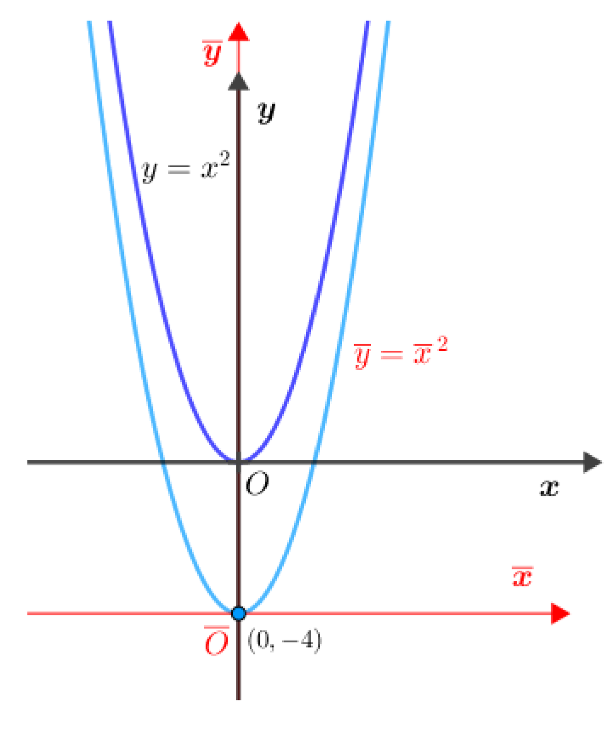
Pelo **Lembrete 1**, no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ a parábola 8 tem como equação $\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$.

Pelo **Lembrete 2**, as equações de translação são:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 0 \\ \overline{y} = y - (-4) = y + 4 \end{cases}\ .$$

Dessa forma, a equação da parábola 8 no sistema xOy fica assim determinada:

$$\overline{y} = \overline{x}^{\,2}$$
$$y + 4 = (x - 0)^2$$
$$y = (x - 0)^2 - 4$$
$$\boxed{y = x^2 - 4}\,.$$



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.