

# Clubes de Matemática da OBMEP

Disseminando o estudo da matemática

Início	Sobre os Clubes	Competições	Fórum restrito	Biblioteca dos Clubes	Ludoteca dos Clubes	Mural de Avisos	Salas de Atividades
--------	-----------------	-------------	----------------	-----------------------	---------------------	-----------------	---------------------

Salas de Estudo Salas de Problemas Salas para Leitura Videoteca dos Clubes Dúvidas? \* Equine \*

## .Problema para ajudar na escola: Fração trigonométrica



### Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Difícil)

Seja  $\theta$  um ângulo agudo tal que

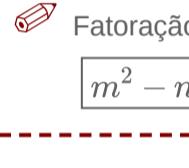
$$A = \frac{2 \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1} + \frac{2 \cos^3 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1}$$

e

$$B = \cos \theta (1 + \cos \theta) + \operatorname{sen} \theta (1 + \operatorname{sen} \theta) - 1.$$

Verifique que  $\frac{A}{B} = 1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta$ .

Adaptado da V ONEM, 2008.



### Lembretes

Relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ para qualquer medida angular } \alpha.$$



Fatoração da diferença de dois quadrados/ Produto da soma pela diferença:

$$m^2 - n^2 = (m + n) \cdot (m - n), \text{ para quaisquer } m, n \in \mathbb{R}.$$

### Solução

Antes de mais nada, observe que  $\theta$  é um ângulo agudo, ou seja,  $0 < \theta < 90^\circ$ . Assim,  $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ ;  $\cos \theta \neq 0$ ;  $\operatorname{sen} \theta \neq \pm 1$  e  $\cos \theta \neq \pm 1$ .

Para simplificar as contas, vamos trabalhar separadamente com o numerador e o denominador da razão  $\frac{A}{B}$ .

► Numerador:

$$A = \frac{2 \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1} + \frac{2 \cos^3 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1}$$

$$A = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1} + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1} \right)$$

$$A = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) + \cos^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}{(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1) \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1)} \right). \quad (i)$$

Antes de prosseguir, observe que:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) &= ((\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) - 1)((\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + 1) \\ &= (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 - 1^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 \theta + 2(\operatorname{sen} \theta)(\cos \theta) + \cos^2 \theta - 1 \\ &= (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta - 1 \\ &= 1 + 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta - 1 \\ &= 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta. \quad (ii) \end{aligned}$$

Substituindo (ii) em (i), segue que:

$$A = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) + \cos^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}{2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta} \right)$$

$$A = \cancel{2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) + \cos^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}{\cancel{2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta}} \right)$$

$$A = \operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta + 1) + \cos^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)$$

$$A = \operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) - \cos^2 \theta$$

$$A = (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$A = (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot 1 + \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$A = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta + (\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$A = (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

$$A = (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot (1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta). \quad (iii)$$

► Denominador:

$$B = \cos \theta (1 + \cos \theta) + \operatorname{sen} \theta (1 + \operatorname{sen} \theta) - 1$$

$$B = \cos \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 1$$

$$B = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta + (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 1$$

$$B = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta + 1 - 1$$

$$B = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta. \quad (iv)$$

Finalmente, por (iii) e por (iv) concluímos que,

$$\frac{A}{B} = \frac{(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot (1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) \cdot (1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{A}{B} = 1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta.$$

$$\text{Assim, de fato, } \frac{A}{B} = 1 + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.