

Problema para ajudar na escola: A lei de formação de uma função



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

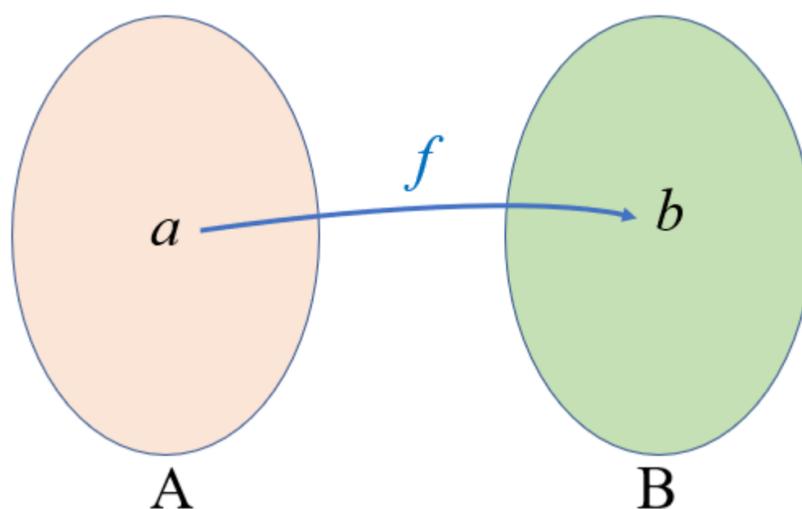
Sabendo que A e B são subconjuntos de \mathbb{R} e que f é uma função de A em B tal que

$$\frac{f(x) - 3}{f(x) + 5} = x, \forall x \in A,$$

determine uma lei de formação para f e o maior conjunto A para o qual essa função está definida.

Solução

Seja f uma função de A em B . Informalmente, a lei de formação da função f é a regra matemática que define exatamente como associar a cada elemento a do domínio A um único valor b , ou $f(a)$, do contradomínio B .



Para descrever essa regra, devemos escrever $f(x)$ a partir de um número real genérico x do domínio de f . Para isso, vamos isolar $f(x)$ na igualdade

$$\frac{f(x) - 3}{f(x) + 5} = x. \text{ Vejamos:}$$

$$\frac{f(x) - 3}{f(x) + 5} = x$$

$$f(x) - 3 = x(f(x) + 5)$$

$$f(x) - xf(x) = 5x + 3$$

$$f(x)(1 - x) = 5x + 3.$$

Note que, para valores reais de x tais que $x \neq 1$, segue que $f(x) = \frac{5x + 3}{1 - x}$.

Para que o quociente $\frac{5x + 3}{1 - x}$ defina um número real, devemos impor apenas que x seja um número real diferente de 1.

Assim, o maior conjunto A para o qual a função f está definida é $A = \mathbb{R} - \{1\}$; em termos de intervalo, temos $A =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Portanto:

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{5x + 3}{1 - x}.$$

Observe que essa regra atende a não existência de x tal que $f(x) = -5$, o que deve acontecer para que a fração $\frac{f(x) - 3}{f(x) + 5}$ seja, de fato, um número real.

Perceba que se existisse x tal que $f(x) = -5$, teríamos

$$\frac{5x + 3}{1 - x} = -5$$

$$5x + 3 = -5 \cdot (1 - x)$$

$$5x + 3 = -5 + 5x,$$

o que acarretaria $3 = -5$, um absurdo!

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.