.Problema para ajudar na escola: Último dígito

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Médio)

Determine o algarismo das unidades da soma $\boxed{3^{2020}+4^{2020}}$.

Adaptado do **6º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera**, 2013.

Ajuda

Algoritmo de Euclides ou **Divisão Euclidiana**

Sejam a e b números naturais, com $b\neq 0$.

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Ao dividirmos a por b encontraremos um quociente q e um resto r, naturais e únicos, tais que:

$(1)\quad 0\leq r<b \qquad (2)\ a=b\cdot q+r.$

Solução

Vamos analisar separadamente os algarismos das unidades das potências 3^{2020} e 4^{2020} .

Observe que:

- $3^1=3$; assim, o algarismo das unidades de 3^1 é 3.
- $3^2=9$; assim, o algarismo das unidades de 3^2 é 9.
- $3^3=27$; assim, o algarismo das unidades de 3^3 é 7.
- $3^4=81$; assim, o algarismo das unidades de 3^4 é 1.
- $3^5=243$; assim, o algarismo das unidades de 3^5 é 3.
- $3^6=729$; assim, o algarismo das unidades de 3^6 é 9.

Note que os algarismos das unidades das potências de 3 são "$3,\ 9,\ 7$ ou 1" e se repetem ciclicamente, nessa ordem, de quatro em quatro. Assim, conseguimos estabelecer o seguinte padrão:

algarismo das unidades	expoente	forma geral do expoente
3	$n=1,\ 1+4=5,\ 5+4=9,\cdots$	$n=4k+1,\ k\in\mathbb{N}$
9	$n=2,\ 2+4=6,\ 6+4=10,\cdots$	$n=4k+2,\ k\in\mathbb{N}$
7	$n=3,\ 3+4=7,\ 7+4=11,\cdots$	$n=4k+3,\ k\in\mathbb{N}$
1	$n=4,\ 4+4=8,\ 8+4=12,\cdots$	$n=4k,\ k\in\mathbb{N}^*$

Agora, com relação às potências de 4, observe que:

- $4^1=4$; assim, o algarismo das unidades de 4^1 é 4.
- $4^2=16$; assim, o algarismo das unidades de 4^2 é 6.
- $4^3=64$; assim, o algarismo das unidades de 4^3 é 4.
- $4^4=256$; assim, o algarismo das unidades de 4^4 é 6.

Note que os algarismos das unidades das potências de 4 são "4 ou 6" e se repetem ciclicamente de dois em dois; com isso, conseguimos estabelecer o seguinte padrão:

algarismo das unidades	expoente	forma geral do expoente
4	$n=1,\ 1+2=3,\ 3+2=5,\cdots$	n ímpar
6	$n=2,\ 2+2=4,\ 4+2=6,\cdots$	n par

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 505 \end{array}$$

A divisão de 2020 por 4, nos indica que 2020 é múltiplo de 4, ou seja, da forma $2020=4\cdot 505$.
Assim, o algarismo das unidades da potência 3^{2020} é 1 .

Por outro lado, 2020 é um número par; logo, o algarismo das unidades da potência 4^{2020} é 6 .

Dessa forma, podemos esquematizar a soma $\boxed{3^{2020}+4^{2020}}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rr} & \cdots 1 \\ + & \cdots 6 \\ \hline & \cdots 7 \end{array}$$

e, portanto, o algarismo das unidades da soma $\boxed{3^{2020}+4^{2020}}$ é $\boxed{7}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.