

Problema para ajudar na escola: Área colorida de azul

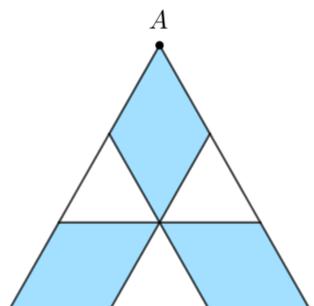


Problema

(A partir do 9º ano do E. F. - Nível de dificuldade: Médio)

A partir de um triângulo equilátero ABC cuja medida da área é 27 cm^2 , traçamos três retas, cada uma paralela a um dos lados do triângulo, de modo que cada lado ficou dividido em três partes iguais.

Qual a medida da área colorida de azul?



Adaptado do 6º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera, 2013.



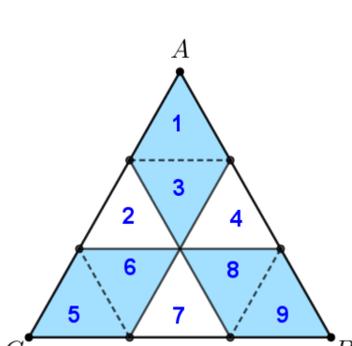
Lembretes

(1) Caso de congruência L.L.L. (lado – lado – lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então estes triângulos são congruentes. (Se você não se lembra desse resultado, clique [AQUI](#).)

(2) Triângulos congruentes têm áreas com a mesma medida.

Solução

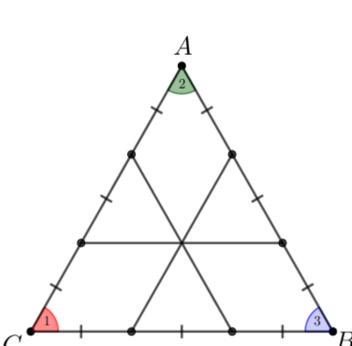
Observe, inicialmente, que ao traçarmos os três segmentos tracejados mostrados na figura a seguir, ficam definidos nove triângulos equiláteros congruentes.



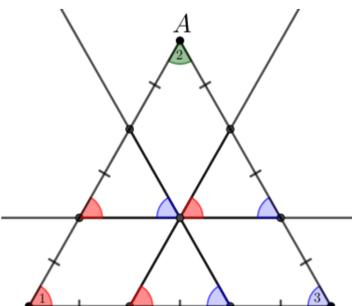
Se você não conseguiu enxergar a afirmação de que os nove triângulos são equiláteros e congruentes, veja as justificativas.

(1) Como consequência das hipóteses de que o triângulo ABC é equilátero e que cada lado está dividido em três partes iguais, temos que:

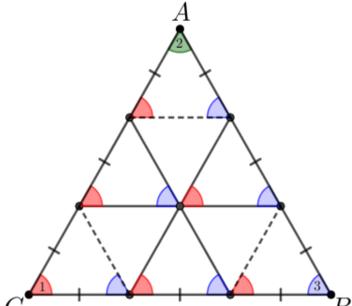
- Os ângulos 1, 2 e 3 têm a mesma medida: 60°
- Os segmentos que aparecem na figura a seguir têm o mesmo comprimento. (Neste momento não importa qual seja este comprimento.)



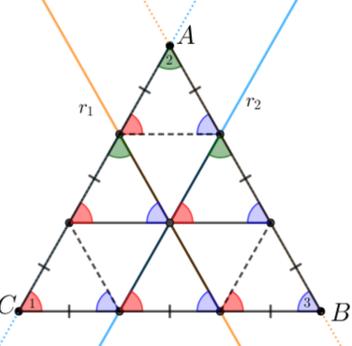
(2) Sabemos que ângulos correspondentes definidos a partir de duas retas paralelas são congruentes. Assim, como foram traçadas três retas, cada uma paralela a um dos lados do triângulo, temos as congruências de ângulos indicadas na próxima figura



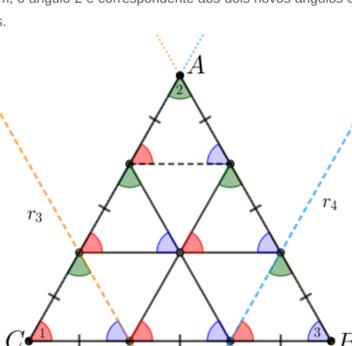
(3) Cada um dos segmentos tracejados que definem os triângulos 1, 3, 5, 6, 8 e 9, é paralelo a um dos lados do triângulo ABC ; assim, temos mais alguns pares de ângulos correspondentes definidos a partir de duas retas paralelas e, portanto, congruentes.



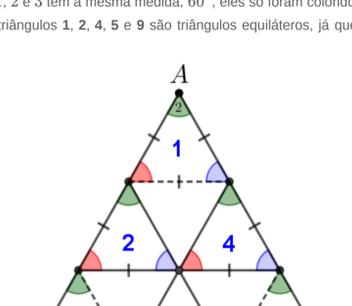
(4) Observe que as retas r_1 e r_2 são paralelas respectivamente às retas suporte dos lados \overline{AB} e \overline{AC} . Assim, o ângulo 2 é correspondente aos dois ângulos coloridos de verde na figura seguinte e, portanto, os três são congruentes.



(5) Agora, observe que as retas r_3 e r_4 , definidas por dois dos segmentos tracejados, são paralelas respectivamente às retas suporte dos lados \overline{AB} e \overline{AC} . Assim, o ângulo 2 é correspondente aos dois novos ângulos coloridos de verde na figura seguinte e, portanto, os três são congruentes.



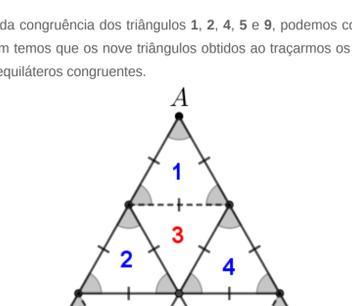
(6) Lembra-se de que os ângulos 1, 2 e 3 têm a mesma medida, 60° , eles só foram coloridos com cores diferentes para facilitar a nossa análise. Dessa forma, os triângulos 1, 2, 4, 5 e 9 são triângulos equiláteros, já que seus respectivos ângulos internos medem 60° .



(7) Como triângulos equiláteros têm lados com mesmo comprimento e os lados do triângulo equilátero inicial ABC estão divididos em três partes com igual comprimento, a próxima figura nos mostra que os triângulos 1, 2, 4, 5 e 9 são congruentes, já que triângulos que têm os três lados ordenadamente congruentes são congruentes.



(8) Veja que, como consequência da congruência dos triângulos 1, 2, 4, 5 e 9, podemos concluir que os triângulos 3, 6, 7, e 8 são igualmente congruentes e assim temos que os nove triângulos obtidos ao traçarmos os três segmentos tracejados no início da solução são, de fato, triângulos equiláteros congruentes.



Como os nove triângulos são congruentes, de acordo com o **Lembrete (2)**, as respectivas medidas de suas áreas são iguais.

(Se você não conhece esse resultado, observe que as alturas dos nove triângulos têm o mesmo comprimento, já que essas alturas são segmentos que estão entre retas paralelas que se encontram a uma mesma distância, e as bases são segmentos cujos comprimentos é um terço do comprimento dos lados do triângulo ABC .)

Assim, se S é a medida em centímetros quadrados da área de cada um dos nove triângulos, então $9S = 27$, donde $S = 3 \text{ cm}^2$.

Finalizando, como a área colorida de azul equivale a área de seis dos nove triângulos congruentes, segue que a área colorida mede $6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$.

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.