

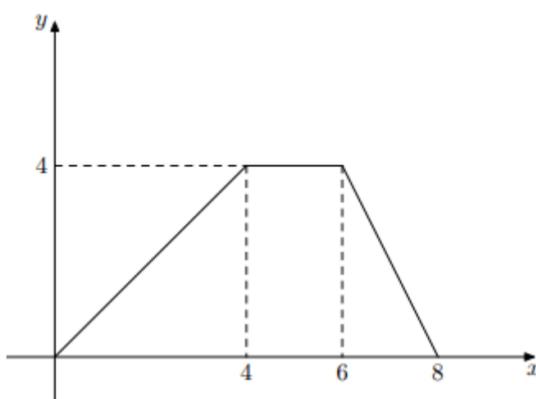
# Problema para ajudar na escola: Uma soma de imagens



## Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Fácil)

O gráfico de uma função  $f$  é definido por três segmentos de reta e está representado na figura a seguir.



(a) Determine  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$ .

(b) Você conhece a notação de somatório? Em caso positivo, indique a soma que você fez, utilizando tal notação.

Adaptado do PROFMAT – Exame Nacional de Acesso, 2017.

## Solução

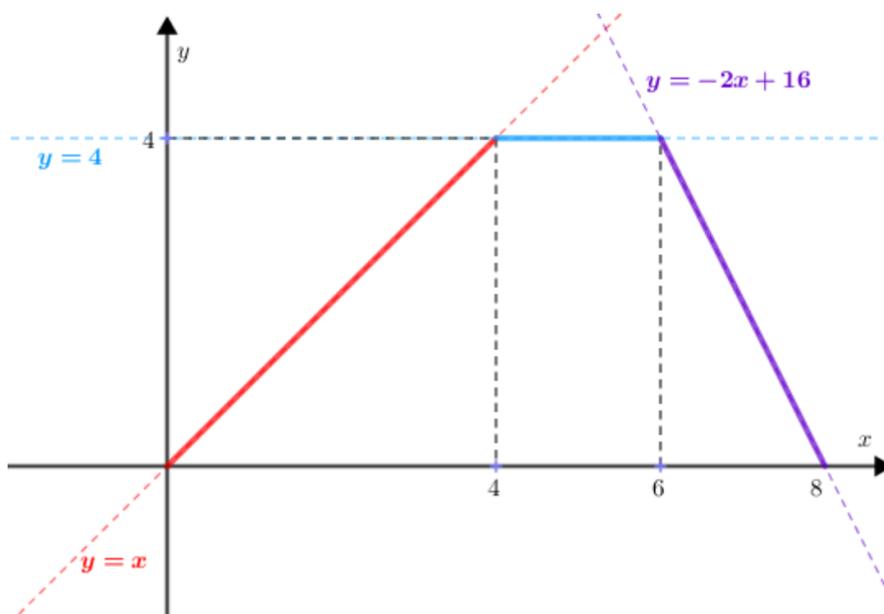
Na figura a seguir, destacamos com cores distintas os segmentos que definem o gráfico da função  $f$  e traçamos as retas suporte de cada um deles. Observe que:

- A reta suporte do segmento vermelho passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(4, 4)$ ; assim, sua equação com relação ao plano cartesiano  $xOy$  é  $y = x$ .
- A reta suporte do segmento azul é a reta horizontal que passa pelo ponto  $(4, 4)$ ; assim, sua equação com relação ao plano cartesiano  $xOy$  é  $y = 4$ .
- Para obter a equação da reta suporte do segmento roxo teremos que fazer algumas continhas.

A reta não é vertical; logo, ela tem equação reduzida, digamos,  $y = ax + b$ . Como ela passa pelos pontos  $(8, 0)$  e  $(6, 4)$ , temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0 = 8a + b \\ 4 = 6a + b \end{cases}$$

Fazendo a diferença das duas equações, obtemos que  $2a = -4$ , donde segue que  $a = -2$ . Substituindo esse valor na primeira equação do sistema, obtemos  $b = 16$ . Portanto, a equação da reta suporte do segmento roxo é  $y = -2x + 16$ .



(a) Pronto, já conseguimos determinar as imagens que compõem a soma definida no problema:

$$f(1) = 1; f(2) = 2; f(3) = 3; f(4) = 4; f(5) = 4; f(6) = 4; f(7) = 2; f(8) = 0.$$

Portanto,

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 2 + 0 = 20.$$

(b) Usando a notação de somatório, podemos reescrever a soma que fizemos como  $\sum_{n=1}^8 f(n) = 20$ .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.