.Problema para ajudar na escola: Uma fração natural

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Médio**)**

Para quais inteiros positivos n o número $\boxed{m = \dfrac{n+17}{n-7}}$ é um inteiro positivo?

Solução

Observe, inicialmente, que

$$n + 17 = n + 17 + (7 - 7) = (n - 7) + 24\,.$$

Assim, podemos reescrever a fração dada no problema como:

$$m = \frac{n+17}{n-7}$$
$$m = \frac{(n-7)+24}{n-7}$$
$$m = \frac{(n-7)}{n-7} + \frac{24}{n-7}$$
$$m = 1 + \frac{24}{n-7}\,.$$

Dessa forma, para que a fração m seja um número inteiro positivo, basta que $n - 7$ seja um divisor positivo de 24.

Vamos, então, determinar quais são os divisores positivos de 24. Para isso, faremos a decomposição em fatores primos de 24 e, a partir dela, determinaremos todos os seus divisores positivos.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l|lllll} & & \boxed{1} & & & & \\ \hline 24 & 2 & \boxed{2} & & & & \\ 12 & 2 & \boxed{4} & & & & \\ 6 & 2 & \boxed{8} & & & & \\ 3 & 3 & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{12} & \boxed{24} & \\ 1 & & & & & & \end{array}$$

Esses oito divisores nos fornecem os seguintes valores de n:

$n-7$	n	Conferindo...
1	8	$m = \dfrac{25}{1} = 25$
2	9	$m = \dfrac{26}{2} = 13$
4	11	$m = \dfrac{28}{4} = 7$
8	15	$m = \dfrac{32}{8} = 4$
3	10	$m = \dfrac{27}{3} = 9$
6	13	$m = \dfrac{30}{6} = 5$
12	19	$m = \dfrac{36}{12} = 3$
24	31	$m = \dfrac{48}{24} = 2$

A segunda coluna da tabela nos mostra os possíveis inteiros positivos n para os quais a fração $\dfrac{n+17}{n-7}$ é um inteiro positivo:

- $\boxed{8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15,\ 19 \text{ e } 31}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio
CAPES CNPq SBM

Realização
impa
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL