Problema para ajudar na escola: Um sistema complicadinho

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Difícil)

Determine a solução do sistema de inequações abaixo.

$$\begin{cases} x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \\ \dfrac{3x-12}{x+2} \leqslant 1 \end{cases}$$

Lembretes

(1) O gráfico de uma função quadrática $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy, sendo sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

(2) Se $\Delta = b^2 - 4ac$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $(x_v, y_v) = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo que $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Solução

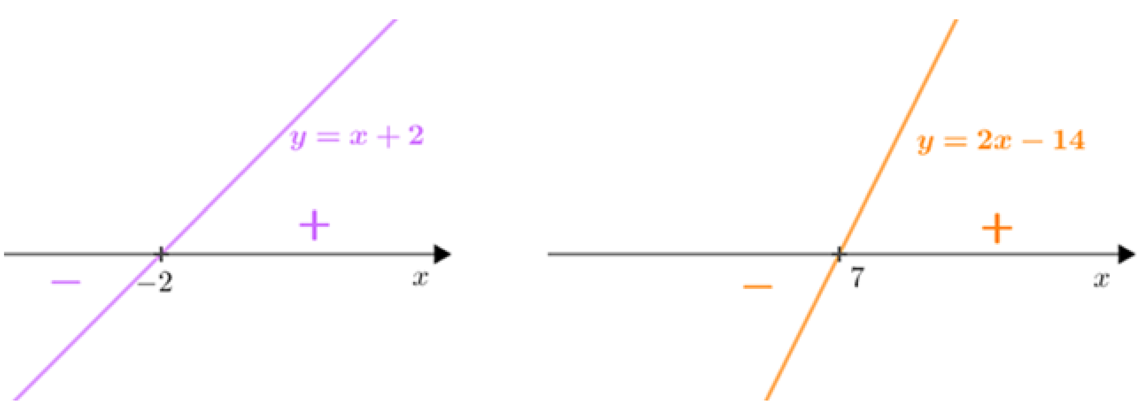
Para determinar a solução do sistema de inequações dado, vamos determinar a solução de cada desigualdade e fazer a interseção das duas soluções.

(I) Observe, inicialmente, a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

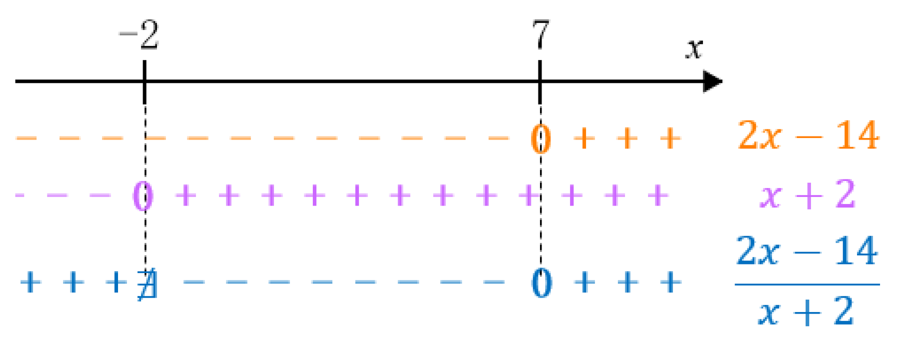
$$\boxed{\frac{3x-12}{x+2} \leqslant 1} \iff \frac{3x-12}{x+2} - 1 \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{(3x-12)-(x+2)}{x+2} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{3x-12-x-2}{x+2} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \boxed{\frac{2x-14}{x+2} \leqslant 0}.$$

Assim, podemos determinar a solução da inequação $\boxed{\dfrac{3x-12}{x+2} \leqslant 1}$ fazendo o estudo de variação de sinal da expressão $\boxed{\dfrac{2x-14}{x+2}}$ e determinando para quais valores reais de x essa expressão é não positiva (negativa ou zero). Para isso, vamos estudar a variação de sinal do numerador e do denominador da fração.

- Em um plano cartesiano xOy as equações $y = x + 2$ e $y = 2x - 14$ definem duas retas oblíquas, a primeira cortando o eixo Ox em $x = -2$ e a segunda em $x = 7$.
  Veja um esboço do gráfico das duas retas:



e o estudo da variação de sinal do quociente $\dfrac{2x-14}{x+2}$:



O estudo da variação de sinal do quociente poderia também ser feito observando que:

$$\begin{cases} 2x - 14 > 0 \iff 2x > 14 \iff x > 7; \\ 2x - 14 = 0 \iff 2x = 14 \iff x = 7; \\ 2x - 14 < 0 \iff 2x < 14 \iff x < 7. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \iff x > -2; \\ x + 2 = 0 \iff x = -2; \\ x + 2 < 0 \iff x < -2. \end{cases}$$

De toda forma,

$$\frac{2x-14}{x+2} \leqslant 0 \iff -2 < x \leqslant 7$$

e, portanto, a solução da inequação $\dfrac{3x-12}{x+2} \leqslant 1$ é o intervalo $\boxed{S_1 =]-2, 7]}$.

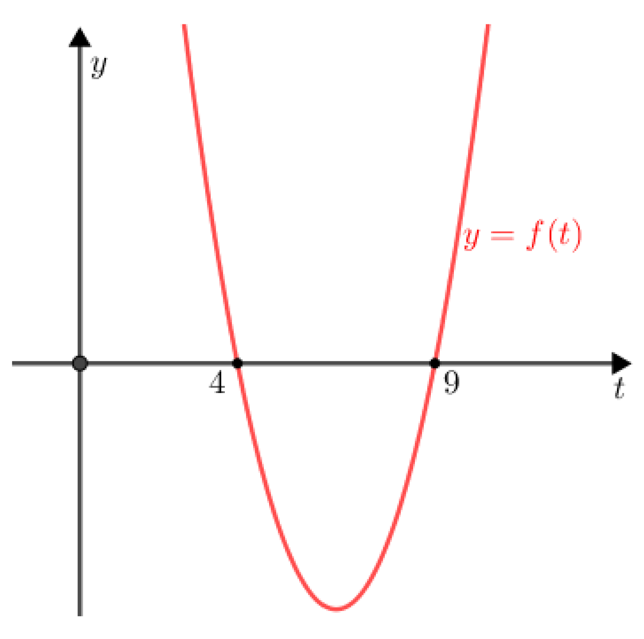
(II) Para determinarmos a solução da desigualdade $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$ teremos um pouquinho mais de trabalho!

Inicialmente, faremos uma mudança de variável: $x^2 = t$. Com isso, a desigualdade $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$ passará a ser escrita como $t^2 - 13t + 36 < 0$ e faremos, então, o estudo de variação de sinal da expressão $t^2 - 13t + 36$ para determinarmos quais os valores reais de t que tornam essa expressão negativa. Vamos lá!

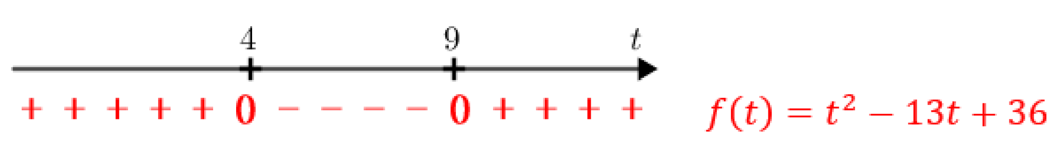
- Analisaremos o sinal da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^2 - 13t + 36$. Lembramos que analisar o sinal de uma função significa determinar quais valores do seu domínio têm imagens iguais a zero, quais têm imagens positivas e quais têm imagens negativas. No nosso caso, queremos determinar os valores de t que têm imagens negativas.
  Em um plano cartesiano tOy o gráfico de f define uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy e concavidade voltada para cima.
  Para traçar um esboço dessa parábola e analisar a variação de sinal de f, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $t^2 - 13t + 36 = 0$. São elas:

$$t = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$
$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$$
$$t = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$t_1 = \frac{13 - 5}{2} = 4 \qquad \text{e} \qquad t_2 = \frac{13 + 5}{2} = 9\,.$$

Veja um esboço do gráfico de f:



e sua variação de sinal:



Logo, $t^2 - 13t + 36 < 0 \iff 4 < t < 9$.

Voltando à variável inicial x, temos que $x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \iff 4 < x^2 < 9$. Com isso, precisamos determinar para quais valores reais de x temos $4 < x^2 < 9$.

Observe que $4 < x^2 < 9$ é equivalente a duas desigualdades simultâneas: $4 < x^2$ e $x^2 < 9$. Assim, para obter a solução da segunda desigualdade que compõe o sistema inicial definido no problema, vamos resolver essas duas novas inequações e fazer a interseção de suas soluções.

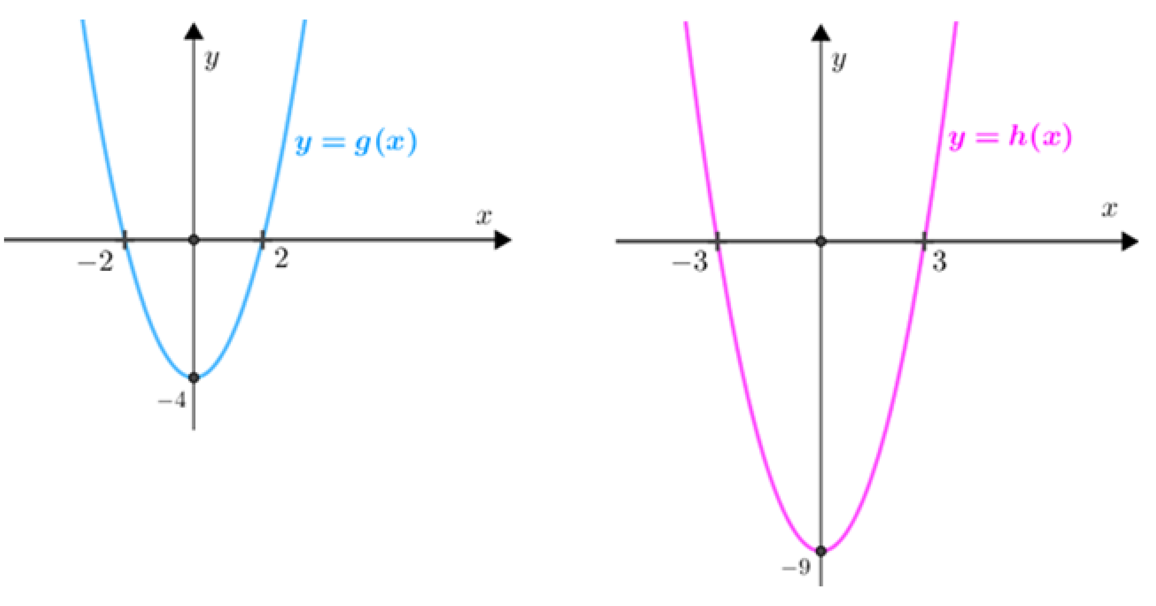
Para isso, vamos fazer o estudo da variação de sinal das funções $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = x^2 - 9$, uma vez que $\boxed{4 < x^2 \iff 0 < x^2 - 4}$ e $\boxed{x^2 < 9 \iff x^2 - 9 < 0}$.

- Os gráficos das funções $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um plano cartesiano xOy são parábolas com seus respectivos eixos de simetria paralelos ao eixo Oy e concavidades voltadas para cima.

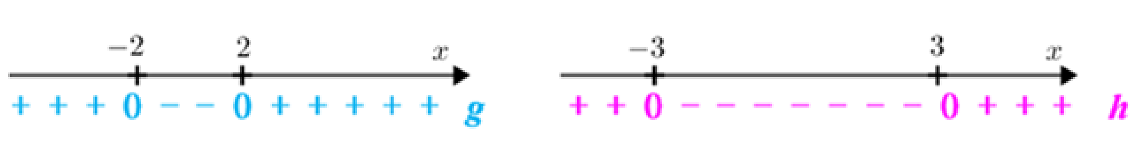
  Para um esboço dessas parábolas vamos determinar as raízes das equações do segundo grau $x^2 - 4 = 0$ e $x^2 - 9 = 0$:

$x^2 - 4 = 0$	$x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 4$	$x^2 = 9$
$x_1 = 2 \quad$ e $\quad x_2 = -2\,.$	$x_3 = 3 \quad$ e $\quad x_4 = -3\,.$

A partir dessas raízes, obtemos um esboço dos gráficos de g e h :

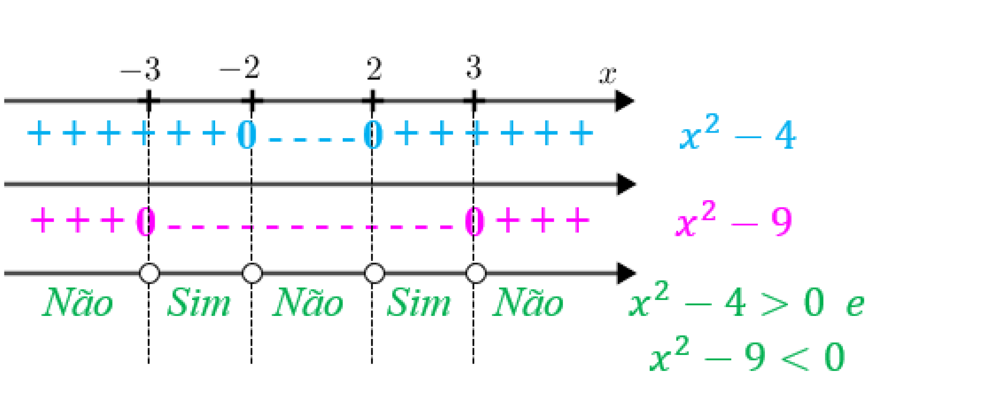


e as duas variações de sinais de que precisamos:



A pergunta cuja resposta fornecerá a solução S_2 da desigualdade $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$ é: **para que valores reais de x temos $\boxed{0 < x^2 - 4}$ e $\boxed{x^2 - 9 < 0}$?**

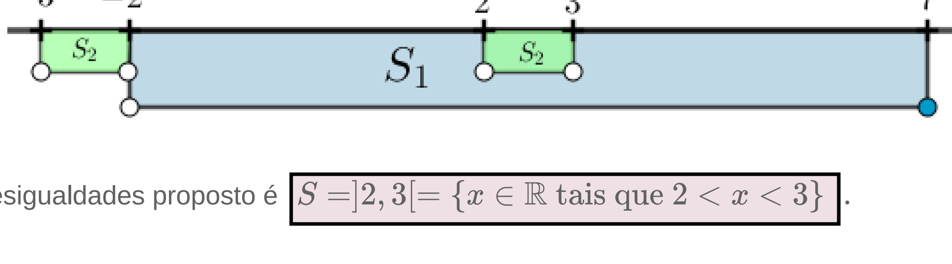
Vamos olhar as duas últimas variações de sinal juntas para responder a essa pergunta e determinarmos S_2:



portanto, $\boxed{S_2 =]-3, -2[\cup]2, 3[}$.

Finalmente, por **(I)** e por **(II)**, a solução S do sistema de inequações proposto no problema já pode ser calculada:

$$S = S_1 \cap S_2$$
$$S =]-2, 7] \cap (]-3, -2[\cup]2, 3[)$$
$$S =]2, 3[\,.$$



Portanto, a solução do sistema de desigualdades proposto é $\boxed{S =]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 2 < x < 3\}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.