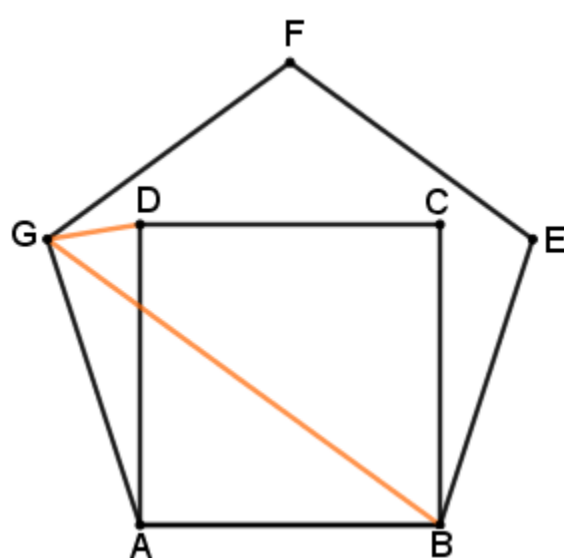


## Problema

(A partir do 8º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Na figura abaixo,  $ABCD$  é um quadrado e  $ABEFG$  é um pentágono regular.  
Qual a medida do ângulo determinado pelos segmentos  $GB$  e  $GD$  ?



Adaptado da XIV ONM, 2014.

### Lembretes e notações



- (1) A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .
  - (2) Cada ângulo interno de um pentágono regular mede  $108^\circ$ .
  - (3) Cada ângulo interno de um quadrado mede  $90^\circ$ .
  - (4) Todo triângulo isósceles possui os ângulos da base com a mesma medida.
- Denotaremos o ângulo de vértice  $V$  e definido por dois pontos, digamos  $X$  e  $Y$ , por  $X\hat{V}Y$  e a sua medida por  $m(X\hat{V}Y)$ .
- Denotaremos o segmento de reta definido por dois pontos, digamos  $X$  e  $Y$ , por  $\overline{XY}$  e seu respectivo comprimento por  $XY$ .

### Solução

- Vamos analisar o triângulo  $AGD$ .

Observe que o segmento  $\overline{AB}$  é lado do quadrado e do pentágono; logo, os dois polígonos têm lados com o mesmo comprimento. Dessa forma, os segmentos  $\overline{AG}$  e  $\overline{AD}$  têm o mesmo comprimento e, portanto, o triângulo  $AGD$  é isósceles.

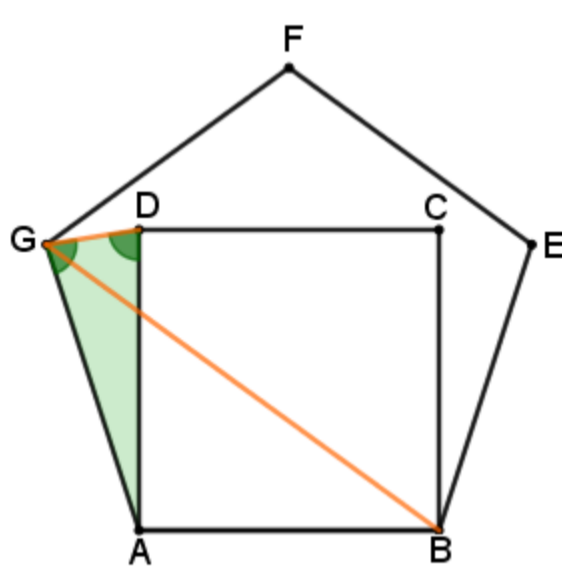
Vamos determinar, inicialmente, a medida do ângulo  $G\hat{A}D$ , utilizando os **Lembretes (2) e (3)**:

$$m(G\hat{A}D) = m(G\hat{A}B) - m(D\hat{A}B)$$

$$m(G\hat{A}D) = 108^\circ - 90^\circ$$

$$\boxed{m(G\hat{A}D) = 18^\circ},$$

já que  $G\hat{A}B$  e  $D\hat{A}B$  são ângulos internos do pentágono e do quadrado, respectivamente.



Com isso, utilizando os **Lembretes (1) e (4)**, segue que:

$$m(D\hat{G}A) + m(G\hat{D}A) + m(G\hat{A}D) = 180^\circ$$

$$2m(D\hat{G}A) + m(G\hat{A}D) = 180^\circ$$

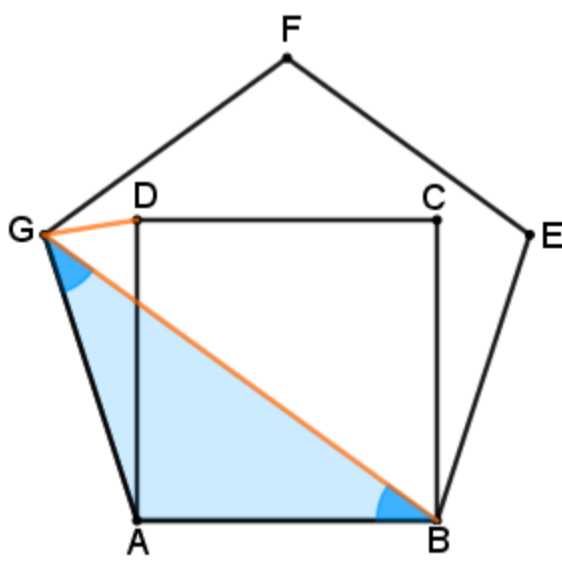
$$2m(D\hat{G}A) + 18^\circ = 180^\circ$$

$$2m(D\hat{G}A) = 162^\circ$$

$$\boxed{m(D\hat{G}A) = 81^\circ}.$$

- Agora, vamos analisar o triângulo  $ABG$  para obter a medida do ângulo  $A\hat{G}B$ .

Como os dois polígonos têm lados com o mesmo comprimento,  $AG = AB$  e, portanto,  $ABG$  é um triângulo isósceles.



Então, utilizando os **Lembretes (1), (2) e (4)**, segue que:

$$m(A\hat{G}B) + m(A\hat{B}G) + m(B\hat{A}G) = 180^\circ$$

$$2m(A\hat{G}B) + m(B\hat{A}G) = 180^\circ$$

$$2m(A\hat{G}B) + 108^\circ = 180^\circ$$

$$2m(A\hat{G}B) = 72^\circ$$

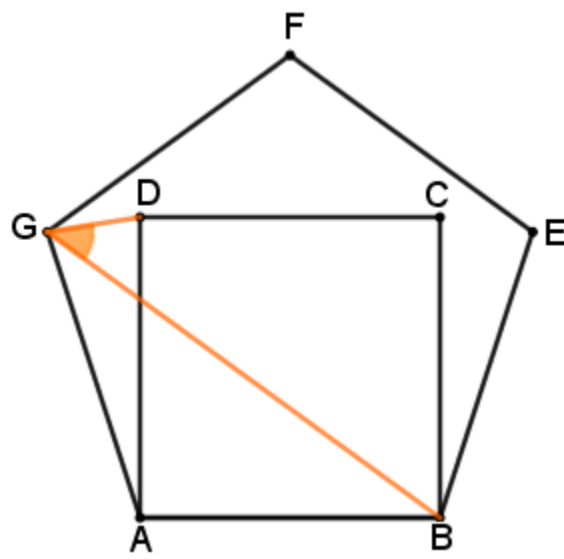
$$\boxed{m(A\hat{G}B) = 36^\circ}.$$

Pronto, já temos condições de determinar a medida do ângulo  $B\hat{G}D$ :

$$m(D\hat{G}B) = m(D\hat{G}A) - m(A\hat{G}B)$$

$$m(D\hat{G}B) = 81^\circ - 36^\circ$$

$$m(D\hat{G}B) = 45^\circ$$



Portanto, a medida do ângulo determinado pelos segmentos  $GB$  e  $GD$  é  $\boxed{45^\circ}$ .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.