.Problema para ajudar na escola: Três números, três produtos

Problema

(A partir da 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Médio)

Determine os números positivos a, b e c tais que $ab=112$, $ac=168$ e $bc=96$.

Adaptado de **VII Concurso de Primavera de Matemáticas**, 2003.

Solução 1

Vamos montar um sistema com as três equações dadas no problema:

$$S=\begin{cases} ab=112 \\ ac=168 \\ bc=96 \end{cases}.$$

Como $a\neq 0, b\neq 0$ e $c\neq 0$, segue que:

$$S=\begin{cases} ab=112 \\ ac=168 \\ bc=96 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{112}{b} \\ a=\dfrac{168}{c} \\ bc=96 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{112}{b}=\dfrac{168}{c} \\ bc=96 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{112c}{168} \\ b=\dfrac{96}{c} \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \dfrac{112c}{168}=\dfrac{96}{c} \right. \Longrightarrow c^2=144 \Longrightarrow c=\pm 12.$$

Mas sabemos que $c>0$; assim:

- $\boxed{c=12}$;
- $\boxed{b=\dfrac{96}{c}=\dfrac{96}{12}=8}$;
- $\boxed{a=\dfrac{112}{b}=\dfrac{112}{8}=14}$.

Conferindo:

$\boxed{ab=14\cdot 8=112}$; $\boxed{ac=14\cdot 12=168}$; $\boxed{bc=8\cdot 12=96}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Multiplicando as equações dadas no problema, obtemos:

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(bc)=(aa)\cdot(bb)\cdot(cc)=a^2b^2c^2=(abc)^2=1806336.$$

Como a, b e c são positivos, abc é positivo. Logo, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade $(abc)^2=1806336$ e obter $abc=\sqrt{1806336}=1344$.

Assim:

- $a=\dfrac{abc}{bc}=\dfrac{1344}{96}=14$,
- $b=\dfrac{abc}{ac}=\dfrac{1344}{168}=8$,
- $c=\dfrac{abc}{ab}=\dfrac{1344}{112}=12$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.