.Problema para ajudar na escola: Soma, produto e quociente

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Médio)

Existem dois números reais cuja soma, o produto e o quociente sejam iguais entre si?

Solução 1

Sejam x e y números reais, com $y \neq 0$, tais que $\boxed{x+y=x\cdot y=\dfrac{x}{y}}$.

Assim, particularmente, temos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x+y=x\cdot y \\ x+y=\frac{x}{y} \end{cases}.$$
De $x+y=\frac{x}{y}$ segue que:

$xy+y^2=x$
$x-xy=y^2$
$x(1-y)=y^2$
$x=\dfrac{y^2}{1-y}$, para $y\neq 1$.

Antes de prosseguir, perceba que $y=1$ não satisfaz as condições do problema. De fato, se $y=1$, das equações do sistema obteríamos $x+1=x$; mas sabemos que $x+1\neq x$ para qualquer x real (caso contrário, concluiríamos que $1=0$, não é?).

Substituindo $x=\dfrac{y^2}{1-y}$ em $x+y=x\cdot y$, segue que

$$\frac{y^2}{1-y}+y=\frac{y^2}{1-y}\cdot y$$
$$\cancel{y}\cdot\left(\frac{y}{1-y}+1\right)=\frac{y^2}{1-y}\cdot\cancel{y}, \text{ observe que } y\neq 0$$
$$\frac{y}{1-y}+1=\frac{y^2}{1-y}$$
$$y+(1-y)=y^2$$
$$y^2=1$$
$$y=1 \text{ ou } y=-1.$$

Já sabemos que $y=1$ não satisfaz as condições do problema; assim, $y=-1$ e de $x+y=x\cdot y$ segue que:

$x-1=x\cdot -1$
$x-1=-x$
$2x=1$
$x=\dfrac{1}{2}$.

Observe que os valores $x=\frac{1}{2}$ e $y=-1$ satisfazem, de fato, $\boxed{x+y=x\cdot y=\dfrac{x}{y}}$:

$$\boxed{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}}\ ;\ \boxed{\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}}\ ;\ \boxed{\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}}\ ;$$

portanto, $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$ e $\boxed{y=-1}$ são os únicos números reais cuja soma, o produto e o quociente são iguais entre si.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Sejam x e y números reais, com $y \neq 0$, tais que $\boxed{x+y=x\cdot y=\dfrac{x}{y}}$.

A igualdade $x\cdot y=\frac{x}{y}$ nos permite concluir que, para $x\neq 0$, $y^2=1$, donde obtemos dois possíveis valores para y: $y=1$ e $y=-1$.

Antes de prosseguirmos na análise desse valores obtidos, observe que substituindo $x=0$ na igualdade $x+y=x\cdot y$ obtemos que $y=0$, o que não é possível devido à restrição do problema de que $y\neq 0$.

- Note que, substituindo $y=1$ na igualdade $x+y=x\cdot y$, obtemos que $x+1=x$, o que também não é possível, pois $x+1\neq x$ para todo x real (caso contrário teríamos $1=0$).
- Agora, substituindo $y=-1$ na igualdade $x+y=x\cdot y$, obtemos a igualdade $x-1=-x$, donde concluímos que $x=\frac{1}{2}$.

Observe que os valores $x=\frac{1}{2}$ e $y=-1$ satisfazem, de fato, $\boxed{x+y=x\cdot y=\dfrac{x}{y}}$:

$$\boxed{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}}\ ;\ \boxed{\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}}\ ;\ \boxed{\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}}\ ,$$

Logo, $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$ e $\boxed{y=-1}$ são os únicos números reais que satisfazem as condições do problema.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.