# Problema para ajudar na escola: Quem está correta

## Problema

**(A partir do 2º ano do E. M.-** Nível de dificuldade: Médio**)**

Ana, Beatriz e Cecília estavam estudando juntas e encontraram o seguinte problema formulado pelo professor delas, mestre PC:

**Qual é a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos ao se lançar dois dados equilibrados e idênticos seja $7$?**

• **Ana analisa a situação e diz**:

*– Há $36$ casos possíveis para os resultados, dos quais $6$ são favoráveis. Logo, a probabilidade de dar a soma $7$ é $\frac{1}{6}$.*

• **Beatriz discorda**:

*– Ana, como os dados são idênticos, não faz sentido distinguir os resultados $(1,2)$ e $(2,1)$, por exemplo. Logo, há apenas $21$ casos possíveis, dos quais $3$ são favoráveis. A probabilidade de dar soma $7$ é, portanto, $\frac{1}{7}$.*

• **Cecília discorda de ambas**:

*– Vocês duas estão complicando a situação sem necessidade…*

*Há $11$ somas possíveis (de $2$ a $12$). Assim, a probabilidade de dar soma $7$ é $\frac{1}{11}$.*

Imagem extraída de Freepik

**Qual das três está certa?**

Adaptado do **PAPMEM**, 2019.

## Lembrete:

A probabilidade de um evento ocorrer em um modelo com espaço amostral finito e equiprovável é calculada por:

$$\textbf{Probabilidade} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}.$$

## Solução

► Vamos inicialmente acompanhar o raciocínio da Cecília.

É claro que podemos definir o espaço amostral do experimento de "lançar dois dados equilibrados e idênticos e somar os pontos da duas faces voltadas para cima" como $\Omega_1 = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, já que não estamos interessados nos números propriamente ditos que aparecem nas duas faces e sim nas suas somas. O problema é que esse espaço **não é equiprovável**!

Observe que temos apenas uma maneira de obtermos soma $2$, saindo $1$ nos dois dados, e mais de uma maneira de obtermos soma $5$, saindo "$1$ e $4$" e "$2$ e $3$", entre outras possibilidades. Com isso, $P(\{2\}) \neq P(\{5\})$ e $\Omega_1$ não é equiprovável. Dessa forma, não podemos utilizar a razão entre "casos favoráveis" e "casos possíveis" e, portanto, **Cecília não está certa**.

► Vamos agora acompanhar o raciocínio da Beatriz.

O espaço amostral definido pela Beatriz pode ser obtido a partir das possíveis combinações de resultados dos números mostrados nas duas faces voltadas para cima dos dados lançados.

| Dados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 e 1 | 1 e 2 | 1 e 3 | 1 e 4 | 1 e 5 | 1 e 6 |
| 2 | ~~2 e 1~~ | 2 e 2 | 2 e 3 | 2 e 4 | 2 e 5 | 2 e 6 |
| 3 | ~~3 e 1~~ | ~~3 e 2~~ | 3 e 3 | 3 e 4 | 3 e 5 | 3 e 6 |
| 4 | ~~4 e 1~~ | ~~4 e 2~~ | ~~4 e 3~~ | 4 e 4 | 4 e 5 | 4 e 6 |
| 5 | ~~5 e 1~~ | ~~5 e 2~~ | ~~5 e 3~~ | ~~5 e 4~~ | 5 e 5 | 5 e 6 |
| 6 | ~~6 e 1~~ | ~~6 e 2~~ | ~~6 e 3~~ | ~~6 e 4~~ | ~~6 e 5~~ | 6 e 6 |

| Dados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 e 1 | 1 e 2 | 1 e 3 | 1 e 4 | 1 e 5 | 1 e 6 |
| 2 | | 2 e 2 | 2 e 3 | 2 e 4 | 2 e 5 | 2 e 6 |
| 3 | | | 3 e 3 | 3 e 4 | 3 e 5 | 3 e 6 |
| 4 | | | | 4 e 4 | 4 e 5 | 4 e 6 |
| 5 | | | | | 5 e 5 | 5 e 6 |
| 6 | | | | | | 6 e 6 |

Temos, de fato, $21$ casos possíveis, mas o espaço amostral da Beatriz não é equiprovável!

Observe que a hipótese de que os dois dados são equilibrados nos garante que o experimento em questão é aleatório, ou seja, nenhuma das faces tem mais chance de sair em um ou em outro dado. Por outro lado, o fato de os dados serem idênticos, ou terem cores diferentes, ou um deles ter uma marquinha em uma de suas faces vai alterar o experimento e as maneiras de obtermos soma $7$? **NÃO**!

Assim, por exemplo,

▬ temos apenas uma maneira de obtermos $1$ e $1$: $1$ no primeiro dado e $1$ no segundo dado;

▬ mas temos duas maneiras de obtermos $1$ e $2$: $1$ no primeiro e $2$ no segundo dado e $2$ no primeiro e $1$ no segundo dado. (Pense em um dos dados com uma marquinha; são situações diferentes que ocorrem: $1$ no dado com marquinha e $2$ no outro dado e $2$ no dado com marquinha e $1$ no outro.)

Assim, **Beatriz também não está certa**.

► Vamos agora acompanhar o raciocínio da Ana:

Podemos definir o espaço amostral do experimento a partir da tabela abaixo, na qual aparecem pares ordenados formados por todas as possíveis combinações de resultados dos números mostrados nas duas faces voltadas para cima.

| Dados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(1,4)$ | $(1,5)$ | $(1,6)$ |
| 2 | $(2,1)$ | $(2,2)$ | $(2,3)$ | $(2,4)$ | $(2,5)$ | $(2,6)$ |
| 3 | $(3,1)$ | $(3,2)$ | $(3,3)$ | $(3,4)$ | $(3,5)$ | $(3,6)$ |
| 4 | $(4,1)$ | $(4,2)$ | $(4,3)$ | $(4,4)$ | $(4,5)$ | $(4,6)$ |
| 5 | $(5,1)$ | $(5,2)$ | $(5,3)$ | $(5,4)$ | $(5,5)$ | $(5,6)$ |
| 6 | $(6,1)$ | $(6,2)$ | $(6,3)$ | $(6,4)$ | $(6,5)$ | $(6,6)$ |

Observamos com a tabela que temos $36$ pares ordenados possíveis de números mostrados nas faces voltadas para cima de cada dado e podemos considerar para o experimento o espaço amostral $\Omega_2 = \{(1,1);(1,2);(1,3);\ldots;(6,4);(6,5);(6,6)\}$. Neste caso, $n(\Omega_2) = 36$ e $\Omega_2$ é equiprovável, já que os dados são equilibrados.

Utilizando a tabela, vemos que as situações favoráveis a obter soma $7$ são:

$(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ e $(6,1)$.

Consequentemente a probabilidade do evento em questão é:

$$\boxed{P(\{7\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$$

e, portanto, **Ana está correta**!

### Um applet para ajudar

Você pode utilizar o applet disponibilizado para se divertir e para ajudar a decidir qual das três colegas está certa!

É só clicar no botão **Lançar os dados**, quantas vezes você quiser.

Faça uma tabelinha e anote as somas obtidas em cada lançamento dos dados.

Mas lembre-se de que, para usar a maneira dita frequentista (repetindo o experimento aleatório muitas vezes e anotando a frequência com que o evento ocorre) para se estimar a probabilidade de um evento, o número de experimentações deve ser repetido por muuuuuitas vezes.

De toda forma, **Boa Diversão!**

**Clique AQUI para abrir o applet.**

OBMEP_ srdg, aplicativo criado com o GeoGebra

O applet abrirá em outra janaela.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.