

.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a vigésima quarta de suas 40 equações



Problema

(A partir da 3ª série do E. M. - Nível de dificuldade: Difícil)

Quantos pares ordenados (x, y) , com x e y números reais, satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?
E se x e y forem inteiros?

Adaptado do 6º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera, 2013.



Ajuda

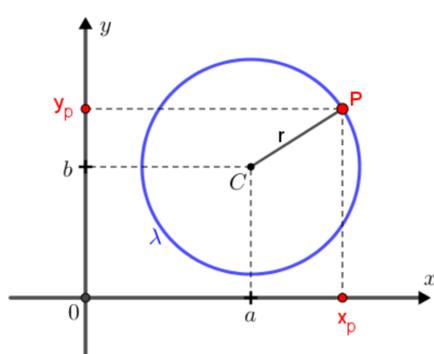
Equação da circunferência

Se, em um plano cartesiano xOy , o centro C de uma circunferência λ de raio r tem coordenadas (a, b) , então essa circunferência é definida algebricamente pela equação

$$\bullet \lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Assim,

$$P = (x_p, y_p) \in \lambda \iff (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 = r^2.$$



Solução

Sejam x e y números reais tais que $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.

Vamos dividir a nossa discussão em quatro casos: $x \geq 0$ e $y \geq 0$; $x \leq 0$ e $y \leq 0$; $x \geq 0$ e $y \leq 0$ e $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

(i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então, da igualdade dada, segue que $x^2 + y^2 = x + y$.

Para facilitar a análise da expressão $x^2 + y^2 = x + y$, vamos fazer dois processos de completamento de quadrado.

(Se você não se lembra desse procedimento, dê uma passadinha nesta [Sala de Leitura](#).)

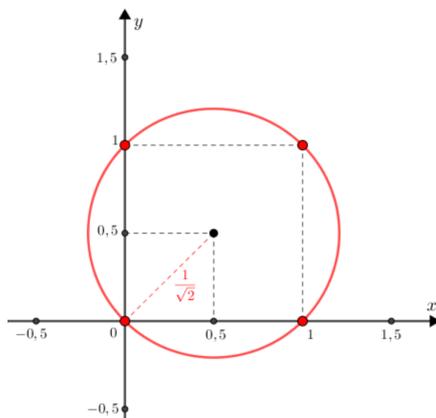
Observe:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x + y \\ (x^2 - x) + (y^2 - y) &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{2}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, se os números reais não negativos x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, então o ponto $P = (x, y)$ é ponto da circunferência do plano cartesiano xOy com centro no ponto $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\lambda_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

- Observe que esta primeira análise já nos fornece a resposta da pergunta sobre **quantos pares ordenados de números reais satisfazem a equação dada no problema**, visto que as coordenadas (x, y) de cada ponto da circunferência λ_1 satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ e temos infinitos pontos nessa circunferência.
- Note que temos quatro pontos de λ_1 com ambas as coordenadas inteiras: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.



Repetindo o processo de completamento de quadrado para os três outros casos, obteremos mais três circunferências cujas coordenadas (x, y) de seus respectivos pontos são soluções da equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$. Em cada um dos três casos, vamos dar destaque para os pontos que têm coordenadas inteiras, para concluir a solução do problema.

(ii) Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$, então, da igualdade dada, segue que $x^2 + y^2 = -x - y$.

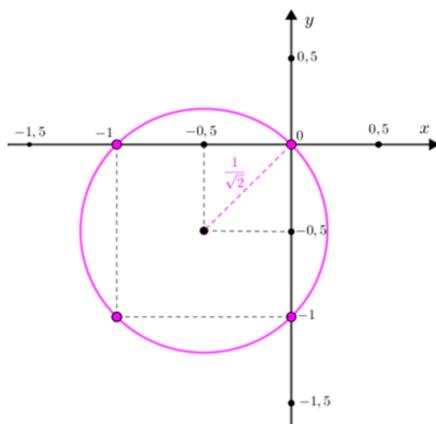
Após dois processos de completamento de quadrado obtemos a equação:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

e, portanto, concluímos que os números reais não positivos x e y que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ definem pontos da circunferência do plano cartesiano xOy com centro no ponto $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\lambda_2 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

- Embora não seja nosso foco no momento, temos infinitos pontos da circunferência λ_2 cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.
- Observe que temos mais três pontos com ambas as coordenadas inteiras: $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ e $(0, -1)$.



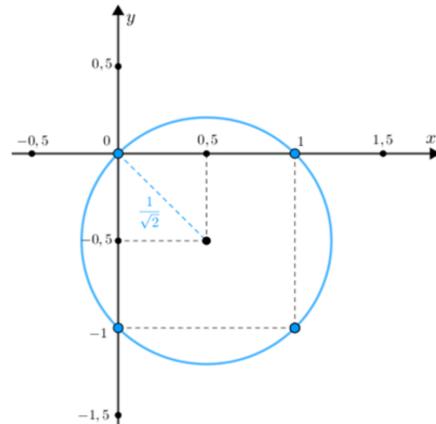
(iii) Considerando agora $x \geq 0$ e $y \leq 0$, da igualdade dada segue que $x^2 + y^2 = x - y$. Após mais dois processos de completamento de quadrado obtemos:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

e, portanto, neste caso, os números reais x e y que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ definem pontos da circunferência do plano cartesiano xOy com centro no ponto $C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\lambda_3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

- Aqui também temos infinitos pontos da circunferência cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.
- Veja que em λ_3 conseguimos mais um ponto com ambas as coordenadas inteiras diferentes dos que já temos: $(1, -1)$.



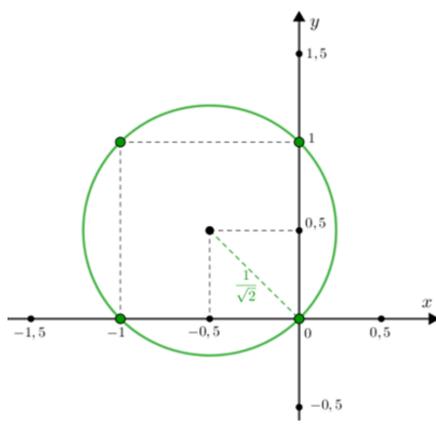
(iv) Considerando, para terminar as análises, $x \leq 0$ e $y \geq 0$, da igualdade do problema segue que $x^2 + y^2 = -x + y$. Após mais dois processos de completamento de quadrado obtemos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

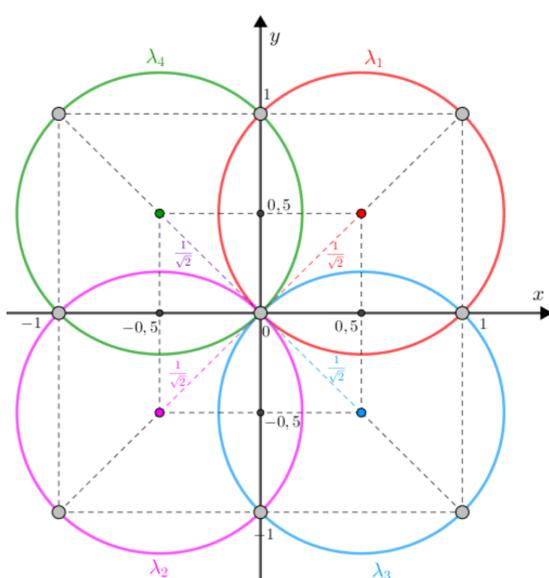
e, portanto, os números reais x e y que neste caso satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ definem pontos da circunferência do plano cartesiano xOy com centro no ponto $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\lambda_4 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

- Aqui também temos infinitos pontos da circunferência λ_4 cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.
- Em λ_4 conseguimos mais um ponto com ambas as coordenadas inteiras, diferente dos exibidos: $(-1, 1)$.



Logo, temos **infinitos** pares ordenados (x, y) de números reais que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, de acordo com as análises feitas e com a figura mostrada abaixo. Particularmente temos **doze** desses infinitos pontos com ambas as coordenadas definidas por números inteiros: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$.



Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.