.Problema para ajudar na escola: Vértices de triângulos

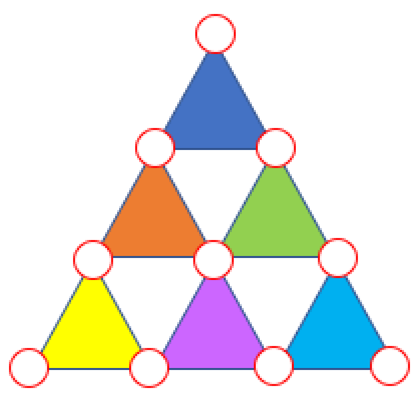
Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Seis triângulos foram desenhados e coloridos conforme mostra a figura abaixo.

Distribua os números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 nos círculos que foram colocados sobre os vértices dos triângulos, de modo que as somas dos números colocados nos três vértices de cada triângulo colorido sejam iguais.

De quantas maneiras é possível fazer essa distribuição?



Observação: Para fazer a distribuição, considere os triângulos fixos e, portanto, não faça rotações ou simetrias.

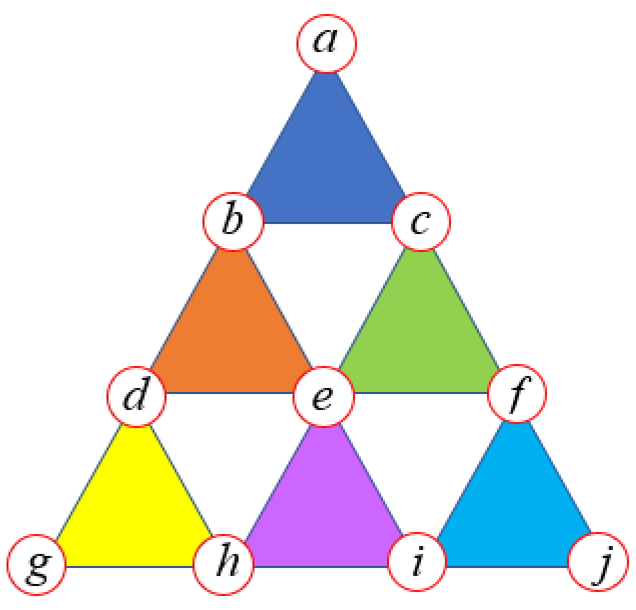
Extraído da **OBM Sênior**, 1994.

Solução

Sejam $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ os números colocados nos vértices, conforme ilustra a próxima figura.

Como $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ e j são números distintos que valem $0, 1, \cdots, 8, 9$, temos que:

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j = 0+1+\cdots+8+9 = 45\,.$$



Sabemos que as somas dos números colocados nos três vértices de cada um dos seis triângulos coloridos são iguais; assim, temos também:

$a+b+c=S$
$b+d+e=S$
$c+e+f=S$
$d+g+h=S$
$e+h+i=S$
$f+i+j=S.$

Observe que na primeira, na quarta e na sexta igualdades não aparece o número e; assim, somando essas três igualdades segue que:

$$(a+b+c)+(d+g+h)+(f+i+j)=3S$$
$$a+b+c+d+f+g+h+i+j=3S$$
$$45-e=3S$$
$$e=45-3S$$
$$e=3\cdot(15-S)\,. \qquad (i)$$

Como $15-S$ é um número inteiro, a igualdade (i) nos mostra que e é um múltiplo de 3. Assim, temos apenas quatro opções para o número e: 0, 3, 6 ou 9.

Mas por outro lado, o número e aparece em vértices de três triângulos; assim, devem existir números naturais b, d, c, f, h, i tais que

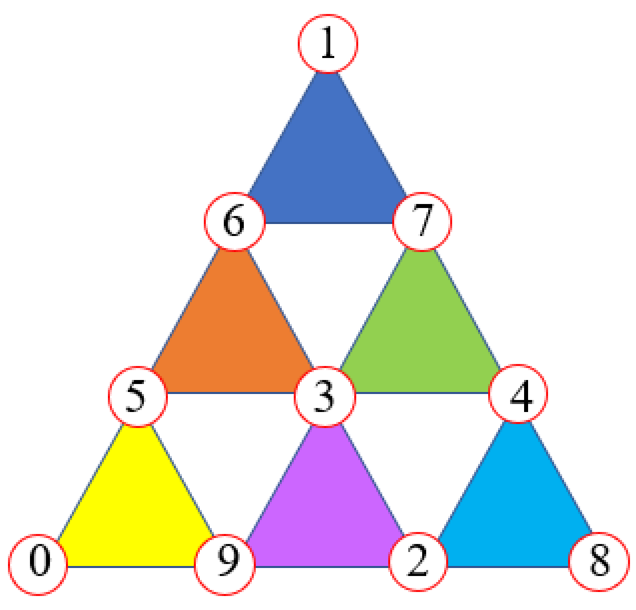
$\boxed{b+d=S-e}$; $\boxed{c+f=S-e}$; $\boxed{h+i=S-e}$.

Vamos, então, testar os quatro valores possíveis de e, observando que a diferença $S-e$ deverá ser escrita de três maneiras diferentes, a partir dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

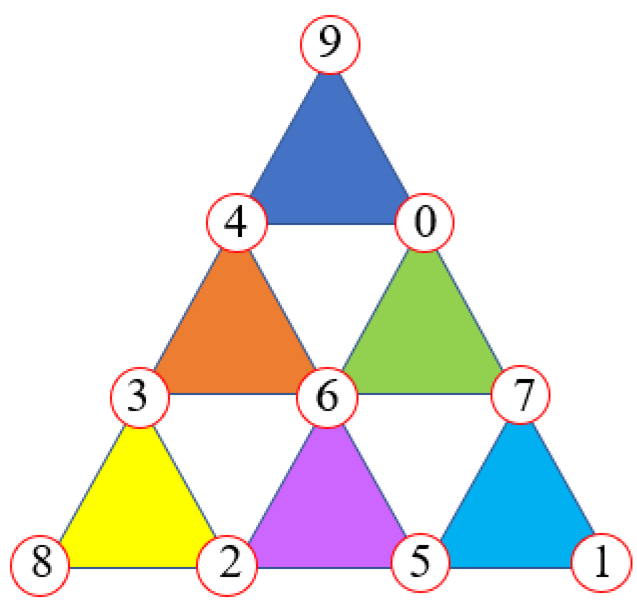
- Se $e=0$, de (i) concluímos que $S=15$ e, portanto, $S-e=15$. Mas perceba que 15 só pode ser escrito como $6+9$ e $7+8$; logo, e não pode ser 0.
- Se $e=3$, de (i) concluímos que $S=14$ e, portanto, $S-e=11$. Perceba que $2+9=11$, $4+7=11$ e $5+6=11$; logo, e pode ser 3.
- Se $e=6$, de (i) concluímos que $S=13$ e, portanto, $S-e=7$. Perceba que $0+7=7$, $2+5=7$ e $3+4=7$; logo, e pode ser 6.
- Se $e=9$, de (i) concluímos que $S=12$ e, portanto, $S-e=3$. Mas perceba que 3 só pode ser escrito como $0+3$ e $1+2$; logo, e não pode ser 9.

Temos, então, duas soluções para o problema, a menos de rotações ou simetrias:

- Para $e=3$, uma das configurações é mostrada a seguir.



- Para $e=6$, mostramos, a seguir, uma das configurações possíveis.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.