.Problema para ajudar na escola: Explicando uma multiplicação diferente

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Existem algumas técnicas de se fazer multiplicações bem rapidinho…
Uma delas pode ser utilizada quando vamos multiplicar dois números com dois algarismos cada tais que:

- os algarismos das dezenas são iguais;
- a soma dos algarismos das unidades é 10.

Veja o Método, exemplificado para a multiplicação 42×48.

Método

$$42\times 48=???$$

Passo 0 – Verificar as condições de aplicabilidade do Método.

$4=4$ e $8+2=10$

Passo 1 – O resultado é um número de três ou quatro algarismos, então já deixe quatro tracinhos em branco, preparados para receber os dígitos do produto final.

$$42\times 48=\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$$

Passo 2 – Nos dois últimos tracinhos, escreva o produto dos últimos algarismos dos dois números (dígitos azuis). Se os algarismos forem 1 e 9, os tracinhos devem ser completados com 09 .

$$42\times 48=\_\_\ \_\_\ \underbrace{\underline{1}\ \underline{6}}_{2\times 8}$$

Passo 3 – Nos dois primeiros tracinhos, escreva o produto entre o algarismo comum aos dois números (dígito vermelho) e o seu sucessor.

$$42\times 48=\underbrace{\underline{2}\ \underline{0}}_{4\times 5}\ \underline{1}\ \underline{6}$$

Resultado: $\boxed{42\times 48=2016}$.

Tente explicar porque o resultado deste método coincide com o resultado final do método que você está habituado a utilizar.

Solução

Vamos supor que os números x e y a serem multiplicados sejam escritos na forma decimal como $x=ab$ e $y=ac$; assim, como a soma dos algarismos das unidades é 10, temos $\boxed{b+c=10}$.

$$\begin{array}{cc} & a\ \ b \\ \times & a\ \ c \\ \hline & ? \end{array}$$

Observe que $\boxed{x=a\cdot 10+b}$ e $\boxed{y=a\cdot 10+c}$; portanto, fazendo o produto de x por y temos que:

$$\begin{aligned} x\cdot y &= (a\cdot 10+b)\cdot(a\cdot 10+c)\\ &= a^2\cdot 100+a\cdot 10\cdot c+b\cdot a\cdot 10+b\cdot c\\ &= a^2\cdot 100+(a\cdot 10)\cdot c+(a\cdot 10)\cdot b+b\cdot c\\ &= a^2\cdot 100+(a\cdot 10)\cdot(c+b)+b\cdot c\\ &= a^2\cdot 100+(a\cdot 10)\cdot 10+b\cdot c\\ &= a^2\cdot 100+a\cdot 100+b\cdot c\\ &= a\cdot 100\cdot(a+1)+b\cdot c\\ &= a\cdot(a+1)\cdot 100+b\cdot c. \qquad (i) \end{aligned}$$

Agora, vamos também escrever os produtos $a\cdot(a+1)$ e $b\cdot c$ na forma decimal. Assim, se $a\cdot(a+1)=mn$ e $b\cdot c=tz$, segue que $\boxed{a\cdot(a+1)=m\cdot 10+n}$ e $\boxed{b\cdot c=t\cdot 10+z}$, donde segue de (i) que:

$$\begin{aligned} x\cdot y &= a\cdot(a+1)\cdot 100+b\cdot c\\ &= (m\cdot 10+n)\cdot 100+(t\cdot 10+z)\\ &= m\cdot 1000+n\cdot 100+t\cdot 10+z \end{aligned}$$

e, com isso, temos a representação decimal do produto $x\cdot y$:

$$x\cdot y=\underbrace{m\ n}_{a\cdot(a+1)}\ \underbrace{t\ z}_{b\cdot c}$$

$$a\,b\cdot a\,c=\underbrace{m\ n}_{a\cdot(a+1)}\ \underbrace{t\ z}_{b\cdot c}.$$

Portanto, de fato, os dois primeiros algarismos do produto $ab\cdot ac$ são os dois algarismos de $\boxed{a\cdot(a+1)}$ e os dois últimos são os algarismos de $\boxed{b\cdot c}$.

$$\begin{array}{cccc} & & a & b \\ & \times & a & c \\ \hline m & n & t & z \end{array}$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.