

.Problema para ajudar na escola: Atravessando uma estrada



Problema

(A partir do 1º ano do E. M. - Nível de dificuldade: Difícil)

Bene deixou a cidade de Benópolis em direção à cidade de Cenópolis às 7h18min, chegando ao seu destino às 10h30min, caminhando sempre a uma velocidade constante.

Nesse mesmo dia, Cene saiu de Cenópolis às 6 horas, chegando em Benópolis às 8h40, andando pela mesma estrada também a uma velocidade constante.

A única estrada que liga as cidades de Benópolis e Cenópolis está sendo asfaltada e entre as duas cidades ainda tem um trecho não asfaltado. Bene e Cene chegaram simultaneamente ao início desse trecho não asfaltado, cada um de um lado; mas Cene saiu do trecho não asfaltado um minuto antes que Bene.



A que horas Bene e Cene chegaram no trecho não asfaltado da estrada?

Adaptado da Revista da **Quantum**.

Lembrete:



Quando um objeto está em movimento, ele muda de posição ao longo do percurso. A velocidade desse objeto é definida levando-se em consideração o espaço que ele percorreu em um determinado intervalo de tempo, ou seja, velocidade é a grandeza que mede quão rápido um objeto se desloca.

Se conhecermos a extensão do percurso e o tempo gasto pelo objeto para percorrê-lo, podemos dividir o espaço percorrido pelo tempo total de percurso e esse quociente chamamos **velocidade média** do objeto.

Se a velocidade de um objeto é constante, ela é igual à velocidade média do objeto nesse movimento, ou seja:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

Chamando a velocidade de v , a distância percorrida de d e o tempo gasto de t , temos $v = \frac{d}{t}$ e, nesse caso, $d = v \times t$.

É importante darmos atenção às unidades de medida. Se, por exemplo, a velocidade é em quilômetros/hora, a distância é em quilômetros e o tempo é em horas.

Solução

Como Bene saiu de Benópolis às 7h18min e chegou em Cenópolis às 10h30min, ele completou o trajeto em 3 horas e 12 minutos.

Por sua vez, Cene saiu de Cenópolis às 6h e chegou em Benópolis às 8h40min; então ele completou o trajeto em 2 horas e 40 minutos.

Vamos calcular os tempos de caminhada em horas e para isso vamos converter 12 minutos e 40 minutos em horas, utilizando duas regrinhas de três simples.

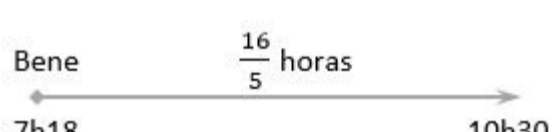
$$\begin{array}{l} 1 \text{ hora} \quad \text{————} \quad 60 \text{ minutos} \\ b \quad \quad \quad \text{————} \quad 12 \text{ minutos} \end{array}$$

Dessa forma, obtemos que $60b = 12$, donde:

$$b = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Assim, o tempo de percurso de Bene foi

$$t_B = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} \text{ horas.}$$



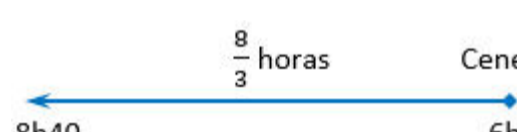
$$\begin{array}{l} 1 \text{ hora} \quad \text{————} \quad 60 \text{ minutos} \\ c \quad \quad \quad \text{————} \quad 40 \text{ minutos} \end{array}$$

Dessa forma, obtemos que $60c = 40$, donde:

$$c = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Assim, o tempo de percurso de Cene foi

$$t_C = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ horas.}$$



Se denotarmos a distância em quilômetros entre as duas cidades por d , podemos calcular a velocidade com que Bene e Cene estavam caminhando, já que essas velocidades são constantes:

$$v_B = \frac{d}{\frac{16}{5}} = \frac{5d}{16} \text{ km/h} \quad \text{e} \quad v_C = \frac{d}{\frac{8}{3}} = \frac{3d}{8} \text{ km/h.}$$

Com essas velocidades, podemos determinar o comprimento em quilômetros do trecho não asfaltado da estrada, pois sabemos que Cene atravessou esse trecho um minuto mais rápido que Bene. Para isso, vamos fazer mais duas regras de três simples para determinar os respectivos tempos t'_B e t'_C que Bene e Cene levaram para percorrer o trecho não asfaltado, cujo comprimento em quilômetros vamos denotar por l .

Como a velocidade de Bene é de $\frac{5d}{16}$ km/h, em uma hora ele percorre $\frac{5d}{16}$ quilômetros. Logo:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ hora} \quad \text{————} \quad \frac{5d}{16} \text{ km} \\ t'_B \quad \quad \quad \text{————} \quad l \text{ km} \end{array}$$

Dessa forma, obtemos que $t'_B \cdot \frac{5d}{16} = l$, donde:

$$t'_B = \frac{16l}{5d} \text{ horas.}$$

Como a velocidade de Cene é de $\frac{3d}{8}$ km/h, em uma hora ele percorre $\frac{3d}{8}$ quilômetros. Logo:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ hora} \quad \text{————} \quad \frac{3d}{8} \text{ km} \\ t'_C \quad \quad \quad \text{————} \quad l \text{ km} \end{array}$$

Dessa forma, obtemos que $t'_C \cdot \frac{3d}{8} = l$, donde:

$$t'_C = \frac{8l}{3d} \text{ horas.}$$

Mas Cene atravessou o trecho não asfaltado um minuto mais rápido que Bene; logo, como 1 minuto = $\frac{1}{60}$ horas, segue que:

$$t'_B - t'_C = \frac{1}{60}$$

$$\frac{16l}{5d} - \frac{8l}{3d} = \frac{1}{60}$$

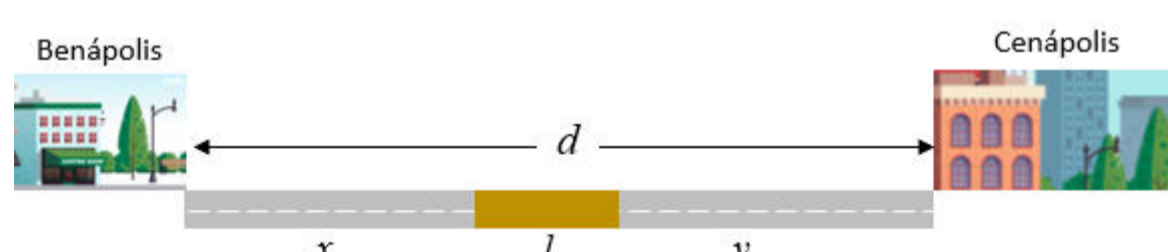
$$\frac{48l - 40l}{15d} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{8l}{15d} = \frac{1}{60}$$

$$l = \frac{15d}{8 \cdot 60}$$

$$l = \frac{d}{32}$$

Como já conhecemos o comprimento do trecho não asfaltado, vamos supor que x seja a distância em quilômetros de Benópolis ao início do trecho não asfaltado e y seja a distância em quilômetros de Cenópolis ao início do trecho não asfaltado, conforme ilustra a próxima figura.



Como d é a distância em quilômetros entre Benópolis e Cenópolis, temos que:

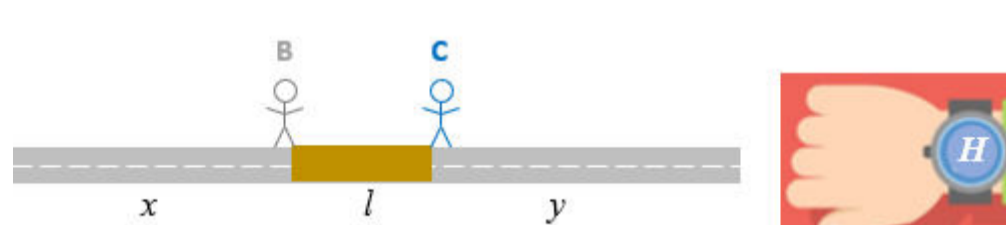
$$x + l + y = d$$

$$x + \frac{d}{32} + y = d$$

$$x + y = d - \frac{d}{32}$$

$$x + y = \frac{31d}{32} \quad (i)$$

Finalmente vamos supor que H tenha sido o horário exato da chegada de Bene e Cene ao trecho não asfaltado



Agora, perceba que:

- Como Bene saiu de Benópolis às 7h18min, ele levou um tempo de $H - (7 + \frac{18}{60})$ horas para percorrer a distância x .
- Como Cene saiu de Cenópolis às 6h, ele levou um tempo de $H - 6$ horas para percorrer a distância y .

Por outro, conhecemos a velocidade com que Bene e Cene percorreram o trajeto e essa velocidade foi constante. Dessa forma, conseguimos determinar x e y :

$$x = \frac{5d}{16} \cdot \left[H - \left(7 + \frac{18}{60} \right) \right] = \frac{5d}{16} \cdot \left(H - \frac{73}{10} \right)$$

$$y = \frac{3d}{8} \cdot (H - 6).$$

Portanto, segue de (i) que:

$$x + y = \frac{31d}{32}$$

$$\frac{5d}{16} \cdot \left(H - \frac{73}{10} \right) + \frac{3d}{8} \cdot (H - 6) = \frac{31d}{32}$$

$$\frac{5d}{16} \cdot \left(H - \frac{73}{10} \right) + \frac{6d}{16} \cdot (H - 6) = \frac{31d}{32}$$

$$\frac{d}{16} \cdot \left[5 \cdot \left(H - \frac{73}{10} \right) + 6 \cdot (H - 6) \right] = \frac{31d}{32}$$

$$2 \cdot \left(5H - \frac{73}{2} + 6H - 36 \right) = 31$$

$$2 \cdot \left(11H - \frac{145}{2} \right) = 31$$

$$22H - 145 = 31$$

$$22H = 176$$

$$H = 8$$

Portanto, Bene e Cene chegaram no trecho não asfaltado da estrada exatamente às **8 horas**.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.