.Problema para ajudar na escola: Será?

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

- Considere o número 125 e o número que obtemos invertendo a ordem de seus dígitos: 521.

Agora, vamos fazer a diferença entre o maior e o menor desses dois números e, em seguida, vamos somar essa diferença com o número que obtemos invertendo a ordem de seus dígitos.

$$\begin{array}{r} 521 \\ -\ 125 \\ \hline 396 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 396 \\ +\ 693 \\ \hline 1089 \end{array}$$

- Vamos aplicar o mesmo procedimento a partir do número 411:

$$\begin{array}{r} 411 \\ -\ 114 \\ \hline 297 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 297 \\ +\ 792 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Isso foi uma coincidência ou o procedimento apresentado resulta sempre em 1089, independentemente do número de três dígitos que seja utilizado?

Solução

No problema, temos que verificar se o procedimento apresentado resulta SEMPRE em 1089, INDEPENDENTEMENTE do número de três dígitos que seja utilizado.

As duas palavras destacadas, **SEMPRE** e **INDEPENDENTEMENTE**, indicam que devemos fazer uma análise genérica tomando por base um número n de três algarismos.

Seja, então, $n = abc$ o número dado e $m = cba$ o que obtemos invertendo a ordem dos algarismos de n.

(Antes de prosseguir, observe que aqui as notações abc e cba não indicam produtos e sim a representação dos números de três algarismos n e m no sistema decimal.)

Ao fazermos a diferença entre o maior e o menor desses dois números, estamos implicitamente supondo que eles são distintos (até porque, se eles forem iguais, a diferença entre eles seria zero e a propriedade em questão não seria verificada); portanto, suponha, sem perda de generalidade, que $n > m$. Neste caso, como $abc > cba$, perceba que $a > c$, já que $a < c$ implica em $m < n$ e $a = c$ implica em $m = n$ $(n = aba = cbc = m)$.

Dessa forma, ao fazermos o esqueminha da subtração, colocando os números de forma que tenhamos os algarismos da centena, dezena e unidade do menor embaixo dos algarismos da centena, dezena e unidade do maior, respectivamente, teremos um probleminha para começar a fazer a subtração.

$$\begin{array}{ccc} Ce & De & Un \\ a & b & c \\ c & b & a \\ \hline \end{array} \; -$$

Percebeu?

Como $c < a$, não podemos tirar a unidades de c. Então, o jeito é emprestar uma unidade de dezena do b para o c no minuendo da subtração (lembre-se de que 1 dezena corresponde a 10 unidades):

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ & b-1 & c+10 \\ a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ c & b & a \\ \hline \end{array} \; -$$

e fazer esta subtração:

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ a & b-1 & c+10 \\ c & b & a \\ \hline \end{array} \; -$$

Pronto, feita a diferença relativa à coluna das unidades, ficamos com outro probleminha: na coluna das dezenas, não conseguimos tirar b unidades de $b-1$ unidades.

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ a & b-1 & c+10 \\ c & b & a \\ \hline & & (c+10)-a \end{array} \; -$$

Agora, o jeito é emprestar uma unidade de centena do a para o $b-1$ no minuendo da subtração; e lembre-se de que 1 centena corresponde a 10 dezenas:

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ & (b-1)+10 & \\ a-1 & \cancel{b-1} & c+10 \\ c & b & a \\ \hline & & (c+10)-a \end{array} \; -$$

e fazer a diferença relativa à coluna das dezenas.

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ a-1 & (b-1)+10 & c+10 \\ c & b & a \\ \hline & 9 & (c+10)-a \end{array} \; -$$

Já podemos, então, finalizar a nossa subtração.

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ a-1 & (b-1)+10 & c+10 \\ c & b & a \\ \hline (a-1)-c & 9 & (c+10)-a \end{array} \; -$$

Finalmente, vamos somar a diferença obtida com o número resultante da inversão dos algarismos dessa diferença, observe:

$$\begin{array}{c|c|c} Ce & De & Un \\ 1 & & \\ (a-1)-c & 9 & (c+10)-a \\ (c+10)-a & 9 & (a-1)-c \\ \hline 1-1+10 & 8 & 10-1 \end{array} \; +$$

ou seja

$$\begin{array}{c|c|c|c} Mi & Ce & De & Un \\ 1 & & & \\ & (a-1)-c & 9 & (c+10)-a \\ & (c+10)-a & 9 & a-1-c \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array} \; +$$

Portanto, não foi uma coincidência termos obtido 1089 aplicando o procedimento proposto nos dois exemplos apresentados.

Apenas uma observação: o número inicialmente escolhido deve ter os algarismos da unidade e da centena distintos, para que o número obtido com a inversão dos algarismos seja distinto do original.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube **Matemática em casa**.