.Problema para ajudar na escola: Quadrados perfeitos perfeitamente disfarçados

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.- Nível de dificuldade: Muito Difícil**)**

Verifique que, para qualquer número natural n, o número natural da forma $\underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{22\cdots2}_{n+1}5$ é um quadrado perfeito.

Extraído da **XIV Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina**, 2011.

Lembrete

Dada uma progressão geométrica finita, $(a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{m-1})$, de razão $q \neq 1$, a soma S desses m termos é dada por

$$S = (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{m-1}) = \frac{a_1 \cdot (q^m - 1)}{q - 1}.$$

Solução

Fixado um número natural n, seja $N = \underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{22\cdots2}_{n+1}5$.

Inicialmente, observe que se $n = 0$, então N não tem algarismos 4 e tem um algarismo 2, além do algarismo 5. Assim, $N = 25 = 5^2$ e, portanto, N é um quadrado perfeito.

Para $n > 0$, vamos escrever o número $N = \underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{22\cdots2}_{n+1}5$ de outra forma, para facilitar a visualização da quantidade de zeros que utilizaremos para representar N na forma decimal.

Observe que N é o resultado da seguinte adição:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 0 & & \cdots & 0 & & 0 & \\
 & & & & & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 0 & + \\
 & & & & & & & & & & 5 & \\
\hline
\underbrace{4 \quad 4 \quad \cdots \quad 4 \quad 4}_{n \text{ algarismos}} & & & & & \underbrace{2 \quad 2 \quad \cdots \quad 2 \quad 2}_{(n+1) \text{ algarismos}} & & & & & 5 &
\end{array}$$

Assim,

$$N = 4 \cdot 10^{2n+1} + 4 \cdot 10^{2n} + \cdots + 4 \cdot 10^{n+3} + 4 \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot 10^{n} + \cdots + 2 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{1} + 5$$

e, portanto, segue que:

$$N = 4 \cdot 10^{2n+1} + \cdots + 4 \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + \cdots + 2 \cdot 10^{1} + 5$$

$$N = 4 \cdot \left(10^{2n+1} + \cdots + 10^{n+2}\right) + 2 \cdot \left(10^{n+1} + \cdots + 10^{1}\right) + 5\,.$$

Observando que temos as somas de duas Progressões Geométricas de razão 10:

$\left(10^{n+2}, \cdots, 10^{2n+1}\right)$ com n termos e $\left(10, \cdots, 10^{n+1}\right)$ com $n+1$ termos,

podemos utilizar a fórmula do **Lembrete** e continuar com nossos cálculos:

$$N = 4 \cdot \frac{10^{n+2} \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} + 2 \cdot \frac{10 \cdot \left(10^{n+1} - 1\right)}{10 - 1} + 5$$

$$N = 4 \cdot \frac{\left(10^{2n+2} - 10^{n+2}\right)}{9} + 2 \cdot \frac{\left(10^{n+2} - 10\right)}{9} + 5$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left(4 \cdot 10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot 10^{n+2}\right) - \frac{20}{9} + 5$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+2}\right) + \frac{25}{9}$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left(4 \cdot 10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+2} + 25\right)$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left((2 \cdot 10^{n+1})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10^{n+1} + 5^2\right)$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left((2 \cdot 10^{n+1})^2 - 2 \cdot (2 \cdot 10^{n+1}) \cdot 5 + 5^2\right)$$

$$N = \frac{1}{9} \cdot \left(2 \cdot 10^{n+1} - 5\right)^2$$

$$N = \left(\frac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}\right)^2.$$

Observe que como N é um número natural, então $x = \dfrac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}$ é também um número natural; assim:

$N = x^2$, com $x \in \mathbb{N}$.

Portanto, para todo número natural n, o número da forma $\underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{22\cdots2}_{n+1}5$ é um quadrado perfeito!

Observação: Se você quiser provar que, de fato, $x = \dfrac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}$ é também um número natural, observe que:

$$2 \cdot 10^{n+1} = 2\underbrace{0\cdots0}_{n+1 \text{ zeros}}$$

$$2 \cdot 10^{n+1} - 5 = 2\underbrace{0\cdots0}_{n+1 \text{ zeros}} - 5$$

$$2 \cdot 10^{n+1} - 5 = 1\underbrace{9\cdots9}_{n \text{ noves}}5$$

$$\begin{array}{cccccccc}
2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & - \\
 & & & & & 5 & \\
\hline
1 & 9 & 9 & \cdots & 9 & 5 &
\end{array}$$

Assim, a soma dos algarismos de $2 \cdot 10^{n+1} - 5$ é:

$$S = 1 + \underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{n \text{ parcelas } 9} + 5$$

$$S = 6 + 9 \cdot n$$

$$S = 3 \cdot (2 + 3n)$$

e, com isso, S é um número natural divisível por 3 , já que $(2 + 3n) \in \mathbb{N}$.

Agora, lembre-se de que se a soma dos algarismos de um número natural for divisível por 3, o próprio número é divisível por 3; assim, $2 \cdot 10^{n+1} - 5$ é divisível por 3 e, consequentemente, $x = \dfrac{2 \cdot 10^{n+1} - 5}{3}$ é um número natural.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.

Apoio

Realização