



.Problema para ajudar na escola: O 2020º número de uma sequência



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Considere a seguinte sequência numérica: 26 ; 2006 ; 202606 ; 20200606 ; ...

O primeiro número dessa sequência é o 26 e, a partir daí, os próximos termos são definidos introduzindo-se, alternadamente,

- 00 entre os algarismos centrais 2 e 6 e
- 26 entre os algarismos centrais 0 e 0.

Reveja os primeiros termos da sequência:

↓ ↓ ↓ ↓
26 ; 2006 ; 202606 ; 20200606 ; ...

Calcule a soma de todos os algarismos do 2020º número dessa sequência.

Adaptado da IX Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina, 2006.

Solução

Para resolver este problema, precisamos analisar o padrão dos termos da sequência definida e o padrão das somas dos algarismos desses termos.

Vejam os:

- O primeiro termo é o 26 e a soma de seus algarismos é 8.
- O segundo termo é o 2006 e a soma de seus algarismos é também 8.
- O terceiro termo é o 202606 e a soma de seus algarismos é $8 + (2 + 6) = 16 = 2 \times 8$.
- O quarto termo é o 20200606 e a soma de seus algarismos é também 16.
- O quinto termo é o 2020260606 e a soma de seus algarismos é $16 + (2 + 6) = 24 = 3 \times 8$.
- O sexto termo é o 202020060606 e a soma de seus algarismos é também 24.
- O sétimo termo é o 20202026060606 e a soma de seus algarismos é $24 + (2 + 6) = 32 = 4 \times 8$.
- O oitavo termo é o 2020202006060606 e a soma de seus algarismos é também 32.

Uma tabela talvez possa ajudar na visualização dos padrões:

	Termos	Soma dos algarismos
1º termo	26	1×8
2º termo	2006	1×8
3º termo	202606	2×8
4º termo	20200606	2×8
5º termo	2020260606	3×8
6º termo	202020060606	3×8
7º termo	20202026060606	4×8
8º termo	2020202006060606	4×8
⋮	⋮	⋮

Perceba que:

- Os termos de ordem par são formados a partir de seus respectivos antecessores imediatos de ordem ímpar, acrescentando os algarismos 00. Assim, a soma dos algarismos de cada termo de ordem par é a mesma soma dos algarismos do termo de ordem ímpar que o precede imediatamente.
- A partir do terceiro termo, os termos de ordem ímpar são formados a partir de seus respectivos antecessores imediatos de ordem par, acrescentando-se os algarismos 26. Logo, a soma dos algarismos de cada termo de ordem ímpar, a partir do terceiro termo, é a soma dos algarismos do termo de ordem par que o antecede imediatamente, acrescida de $2 + 6 = 8$.

Dessa forma, se denotarmos por

$$(a_n) = (26, 2006, 202606, 20200606, 2020260606, \dots)$$

a sequência original, e por

$$(s_n) = (8, 8, 16, 16, 24, 24, 32, 32, \dots)$$

a sequência formada pela soma dos algarismos dos respectivos termos de (a_n) , podemos verificar que:

$$s_{2n} = s_{2n-1} = 8n, \text{ para todo } n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Veja alguns exemplos:

- Para $n = 1$, $s_2 = s_1 = 8$.
- Para $n = 2$, $s_4 = s_3 = 16$.
- Para $n = 3$, $s_6 = s_5 = 24$.
- Para $n = 4$, $s_8 = s_7 = 32$.
- Para $n = 5$, $s_{10} = s_9 = 40$.

Com isso, temos que:

$$s_{2020} = s_{2 \times 1010} = s_{2 \times 1010 - 1} = 8 \times 1010 = 8080$$

e, portanto, a soma de todos os algarismos do 2020º número da sequência definida no problema é **8080**.

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.