



.Problema para ajudar na escola: Número bonzinho



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

Um número natural **B** é dito **bonzinho** se ele tem apenas os algarismos 1, 2 ou 3 e todos os números de dois dígitos formados por algarismos localizados em posições adjacentes (vizinhas) de **B** são números distintos.

Por exemplo,

- 2212 é bonzinho (22, 21 e 12 são distintos);
- 321 é bonzinho (32 e 21 são distintos) ;
- 112233 é bonzinho;
- 31231 não é bonzinho (**31231**), mas 31233 e 31232 são.

Existe algum número **bonzinho** com dez dígitos?

E com onze?

Extraído da Olimpíada de Mayo, 2004.



Lembrete

Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para dois eventos: Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,

e esses eventos forem independentes entre si, então a quantidade de maneiras em que os dois eventos ocorrem ao mesmo tempo é

$$m_1 \times m_2 .$$

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Solução

- Observe, inicialmente, que um número que tenha n algarismos define $n - 1$ números de dois algarismos localizados em posições adjacentes, já que todos os seus algarismos, com exceção do último, são primeiro algarismo de um número de dois algarismos.
- Por outro lado, a partir dos algarismos 1, 2 e 3, podemos formar nove números de dois algarismos: 3 possibilidades de escolha para o primeiro algarismo e 3 para o segundo; logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $3 \times 3 = 9$ maneiras de construirmos os números em questão.

Pelo até aqui exposto, a partir de um número natural **B** bonzinho com n algarismos é possível definir $n - 1$ números de dois algarismos localizados em posições adjacentes. Mas utilizando os algarismos 1, 2 e 3 só conseguimos definir 9 números distintos com dois algarismos. Assim, $n - 1 \leq 9$, donde $n \leq 10$.

Dessa forma, um número bonzinho não pode ter mais de dez algarismos e, portanto, não existe um número bonzinho com 11 algarismos.

O fato de teoricamente ser possível definir nove números diferentes com dois algarismos utilizando apenas o 1, o 2 e o 3 não garante por si só a existência de um número bonzinho com dez algarismos; precisamos exibir, de fato, um.

Mas, por exemplo, 1121322331 é bonzinho:

1121322331
11
12
21
13
32
22
23
33
31

o que garante a existência de pelo menos um número bonzinho com dez algarismos.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.