

.Problema para ajudar na escola: Distância entre vértices



Problema

(A partir do 2º ano do E. M.- Nível de dificuldade: Médio)

Três das seis faces de um paralelepípedo retângulo têm as seguintes áreas: 192 cm^2 , 336 cm^2 e 252 cm^2 .
Qual a distância entre dois vértices desse paralelepípedo que não estejam na mesma face?

Extraído da IV ONEM, 2007.

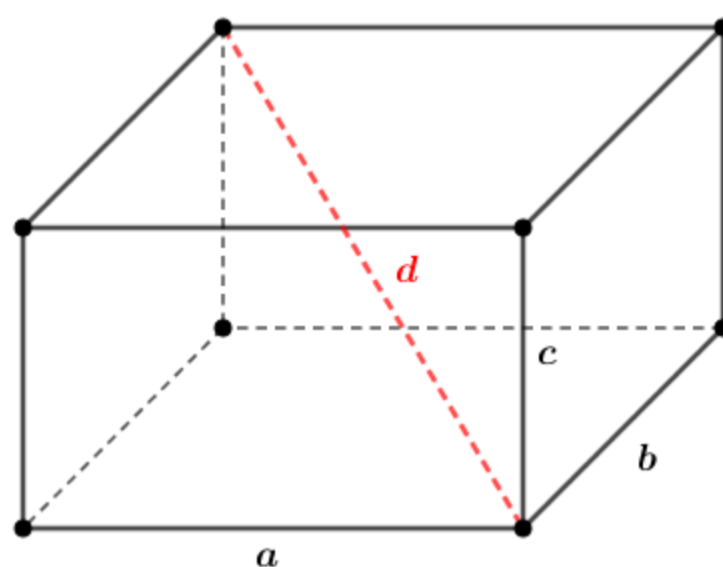
Lembrete

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

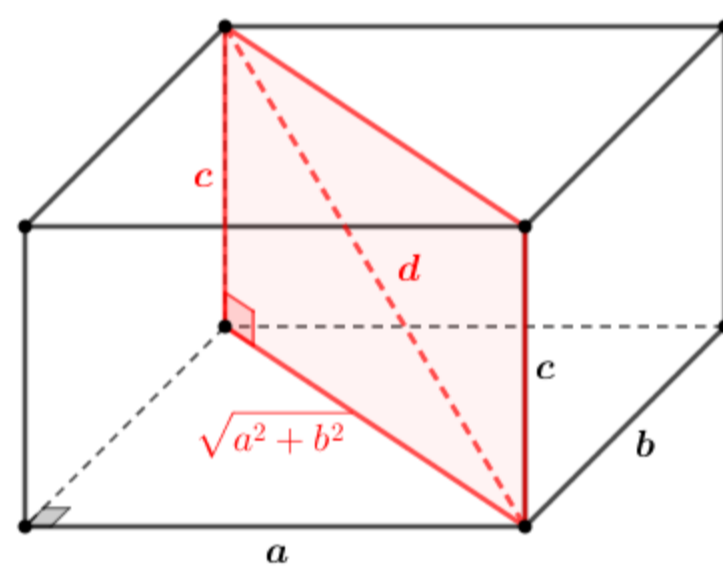


Solução

Vamos supor que os comprimentos dos lados do paralelepípedo retângulo do problema sejam a , b e c centímetros, conforme indica a figura a seguir. Como o problema pede a distância entre dois vértices que não estejam na mesma face desse paralelepípedo, precisamos calcular o comprimento d de uma de suas diagonais; por exemplo, a diagonal colorida de vermelho na mesma figura.



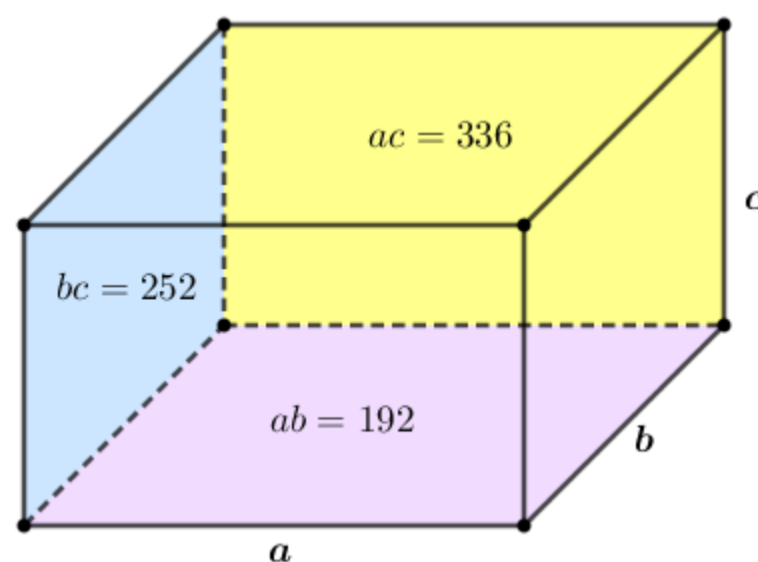
Observando a próxima figura, vemos que o comprimento d é dado por $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, consequência de duas aplicações do Teorema de Pitágoras.



Como a , b e c são medidas genéricas, podemos supor, sem perda de generalidade, que:

- a face determinada pelos lados de comprimentos a e b centímetros tem área igual a 192 cm^2 ;
- a face determinada pelos lados de comprimentos a e c centímetros tem área igual a 336 cm^2 ;
- a face determinada pelos lados de comprimentos b e c centímetros tem área igual a 252 cm^2 ;

e, assim, $ab = 192$, $ac = 336$ e $bc = 252$.



Dessa forma,

$$(abc)^2 = (ab)(ac)(bc)$$
$$(abc)^2 = 192 \times 336 \times 252$$

e, como

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(abc)^2}{(bc)^2} + \frac{(abc)^2}{(ac)^2} + \frac{(abc)^2}{(ab)^2},$$

segue que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{192 \times 336 \times 252}{252^2} + \frac{192 \times 336 \times 252}{336^2} + \frac{192 \times 336 \times 252}{192^2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{192 \times 336}{252} + \frac{192 \times 252}{336} + \frac{336 \times 252}{192}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 256 + 144 + 441$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 841.$$

Portanto:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{841}$$

$$d = 29.$$

Logo, a distância entre dois vértices que não estão na mesma face do paralelepípedo retângulo definido no problema é 29 cm .

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.