.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a vigésima segunda de suas 40 equações

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil**)**

Quantas soluções com quatro inteiros ímpares tem a equação

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1 \text{ ?}$$

AJUDA

Em várias situações é possível determinarmos a paridade de expressões envolvendo números inteiros, a partir da paridade desses números, sem sequer calcular as expressões.

O que nos permite "adivinhar" a paridade de algumas expressões desse tipo são estas três propriedades;

(1) A soma de dois números inteiros de mesma paridade é par.

(2) A soma de dois números inteiros de paridade oposta é ímpar.

(3) O produto de dois números inteiros só será ímpar se os dois números forem ímpares.

Com elas, podemos construir as tabelinhas abaixo.

+	par	ímpar
par	par	ímpar
ímpar	ímpar	par

x	par	ímpar
par	par	par
ímpar	par	ímpar

Solução

Vamos supor que $m,\ n,\ x,\ y$ sejam inteiros ímpares tais que $\boxed{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1}$.

Assim, segue que:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

$$\frac{nxy+mxy+mny+mnx}{mnxy}=1$$

$$nxy+mxy+mny+mnx=mnxy\,. \qquad (i)$$

Como $m,\ n,\ x,\ y$ são ímpares, a propriedade **(3)** da **Ajuda** nos garante que cada parcela da adição que aparece na expressão (i) é um número ímpar. Assim, como "a soma de dois inteiros ímpares é um inteiro par" e "a soma de dois inteiros pares é par", então

- **a soma que aparece no lado esquerdo da igualdade de (i) é um número par.**

$$\underbrace{\underbrace{nxy+mxy}_{par}+\underbrace{mny+mnx}_{par}}_{par}$$

Por outro lado, como $m,\ n,\ x,\ y$ são ímpares, a mesma propriedade **(3)** da **Ajuda** nos garante que

- **o produto que aparece no lado direito da igualdade de (i) é um número ímpar.**

$$\underbrace{mnxy}_{ímpar}$$

Mas isso é impossível de acontecer, pois sabemos que não existe um número inteiro que seja simultaneamente par e ímpar!

$$\underbrace{nxy+mxy+mny+mnx}_{\text{número par}}=\underbrace{mnxy}_{\text{número ímpar}}$$

Com isso, concluímos que não existem inteiros ímpares $m,\ n,\ x,\ y$ tais que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ e, portanto, a equação do problema não tem solução com quatro inteiros ímpares.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.