.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a vigésima primeira de suas 40 equações

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Muito Difícil**)**

Se p é um número primo, determinar todas as possíveis soluções inteiras m e n da equação $\boxed{p\cdot(m+n)=m\cdot n}$.

Lembrete

(1) Sejam $a,\ b,\ q$ números inteiros.

Se sabemos que q é um divisor do produto $a\cdot b$ não podemos dizer muita coisa sobre a relação de q com a e b. Mas se q é um divisor do produto $a\cdot b$ e q é primo, então NECESSARIAMENTE q é divisor de a ou de b. Em símbolos:

q é primo e $q\,|\,a\cdot b\ \Rightarrow\ q\,|\,a$ ou $q\,|\,b$.

(2) Se z é um número inteiro, então o mínimo múltiplo comum entre z e $z-1$ é 1. Em símbolos,

$mdc(z,z-1)=1$.

(3) Sejam $a,\ b,\ c$ números inteiros.

Se c é um divisor do produto $a\cdot b$ e $mdc(c,a)=1$ (a e c são relativamente primos), então NECESSARIAMENTE c é divisor de b. Em símbolos:

$mdc(c,a)=1$ e $c\,|\,a\cdot b\ \Rightarrow\ c\,|\,b$.

Solução

Inicialmente, observe que da igualdade $p\cdot(m+n)=m\cdot n$ concluímos que p é um divisor do produto $m\cdot n$, uma vez que a soma $m+n$ é um número inteiro. Dessa forma, como p é primo, segue do **Lembrete (1)** que p é um divisor de m ou de n.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que p seja um divisor de m (Isso significa que, se utilizarmos o mesmo raciocínio que faremos, apenas substituindo o número m pelo n, chegaremos à mesma conclusão.)

Assim, existe um número inteiro k tal que $m=p\cdot k$ e, com isso, segue da igualdade $\boxed{p\cdot(m+n)=m\cdot n}$ que:

$p\cdot(p\cdot k+n)=p\cdot k\cdot n$

$\cancel{p}\cdot(p\cdot k+n)=\cancel{p}\cdot k\cdot n$ (Observe que $p\neq 0$.)

$p\cdot k+n=k\cdot n$

$p\cdot k=k\cdot n-n$

$p\cdot k=n\cdot(k-1).\qquad (i)$

Como n é um número inteiro, segue de (i) que $k-1$ **é divisor de** $p\cdot k$. Mas, utilizando o **Lembrete (2)**, temos que $mdc(k,k-1)=1$ e, portanto, o **Lembrete (3)** nos garante que $k-1$ é divisor de p.

A afirmação de que $k-1$ é divisor de p resolve, finalmente, o nosso problema, pois, sendo p primo, seus únicos divisores inteiros são: $1;\ -1\,;p\,;-p$.

Dessa forma, temos quatro casos para analisar:

- $k-1=1$

  Neste caso $k=2$; e, como $m=p\cdot k$, então $\boxed{m=2p}$.

  Por outro lado, de (i) segue que

  $p\cdot 2=n\cdot(2-1)$

  $\boxed{n=2p}$.

- $k-1=-1$

  Neste caso $k=0$; e, como $m=p\cdot k$, então $\boxed{m=0}$.

  De (i) segue que

  $p\cdot 0=n\cdot(0-1)$

  $0=-n$

  $\boxed{n=0}$.

- $k-1=p$

  Neste caso $k=p+1$; e, como $m=p\cdot k$, então $\boxed{m=p^2+p}$.

  De (i) segue que

  $p\cdot(p+1)=n\cdot((p+1)-1)$

  $p\cdot(p+1)=n\cdot p$

  $\cancel{p}\cdot(p+1)=n\cdot\cancel{p}$ (Lembre que $p\neq 0$.)

  $\boxed{n=p+1}$.

- $k-1=-p$

  Neste caso $k=-p+1$; e, como $m=p\cdot k$, então $\boxed{m=p-p^2}$.

  De (i) segue que

  $p\cdot(-p+1)=n\cdot((-p+1)-1)$

  $p\cdot(-p+1)=n\cdot(-p)$

  $\cancel{p}\cdot(-p+1)=-n\cdot\cancel{p}$ (Lembre que $p\neq 0$.)

  $\boxed{n=p-1}$.

Portanto, fixado o número primo p, temos quatro pares de números inteiros que satisfazem a equação $\boxed{p\cdot(m+n)=m\cdot n}$:

$$\boxed{2p\ \text{ e }\ 2p}\ ;\ \boxed{0\ \text{ e }\ 0}\ ;\ \boxed{p^2+p\ \text{ e }\ p+1}\ ;\ \boxed{p-p^2\ \text{ e }\ p-1}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.