.Problema para ajudar na escola: Três conjuntos e três funções

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.- Nível de dificuldade: Difícil**)**

(**ITA**, 2010) Os conjuntos A e B são formados por números reais e C é um subconjunto da união $A \cup B$.
Sabendo que $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais abaixo definidas

$$f : A \cup B \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = ln(x - \sqrt{\pi})\ ;$$
$$g : A \cap C \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}\ ;$$
$$h : B \cap C \to \mathbb{R}$$
$$h(x) = \sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}\ ;$$

determinar C.

Solução 1

Vamos inicialmente determinar os domínios das funções f, g, h.

- O número real $ln(t)$ está definido apenas para valores positivos de t.

  Então, para que $ln(x - \sqrt{\pi})$ seja um número real, devemos ter $x - \sqrt{\pi} > 0$, ou seja, $\boxed{x > \sqrt{\pi}}$.

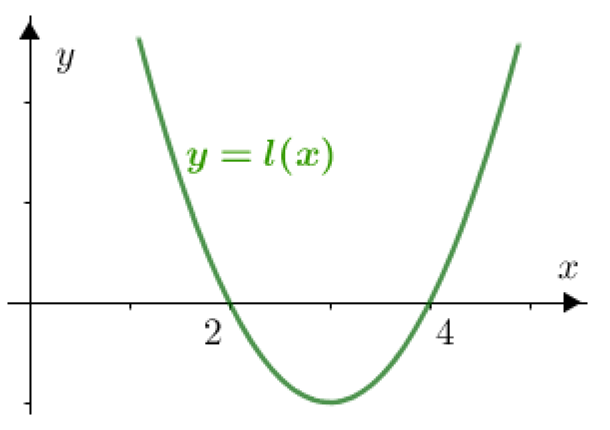
- O número real $\sqrt{t}$ está definido apenas para valores não negativos de t.

  Então, para que $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ defina um número real, devemos ter $-x^2 + 6x - 8 \geqslant 0$, ou seja, $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$. Para resolver essa desigualdade, vamos estudar a variação de sinal da função $l(x) = x^2 - 6x + 8$.

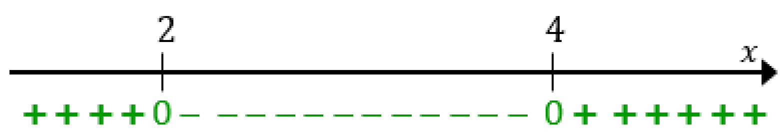
  - Em um plano cartesiano xOy o gráfico de l é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy e concavidade voltada para cima. Para traçar esse gráfico e analisar a variação de sinal, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $x^2 - 6x + 8 = 0$; são elas:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4\,.$$

  Veja um esboço do gráfico de l:



  e sua variação de sinal:

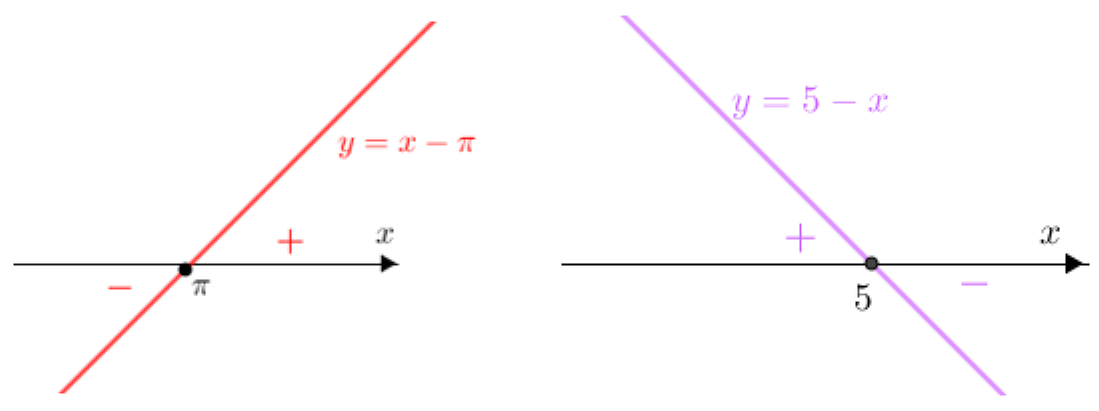


  Dessa forma, para que $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ seja um número real, devemos ter $\boxed{2 \leqslant x \leqslant 4}$.

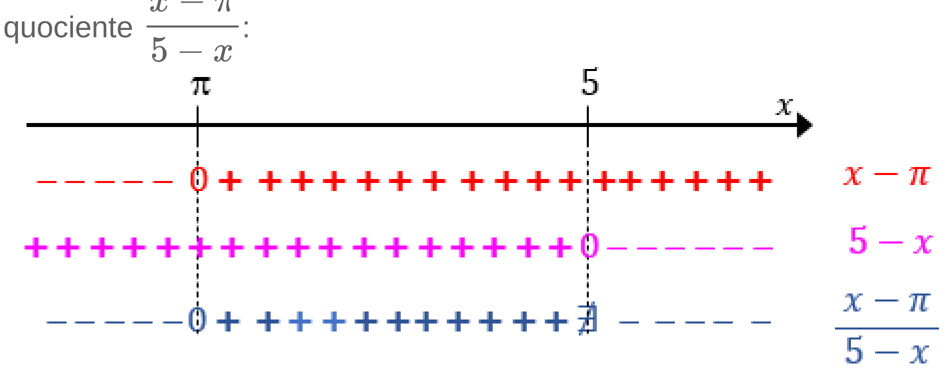
- Já vimos que o número real $\sqrt{t}$ está definido apenas para valores não negativos de t.

  Então, para que $\sqrt{\dfrac{x-\pi}{5-x}}$ defina um número real, devemos ter $\dfrac{x-\pi}{5-x} \geqslant 0$, desde que tenhamos $x \neq 5$. Para resolver a desigualdade $\dfrac{x-\pi}{5-x} \geqslant 0$, vamos estudar a variação de sinal do numerador e do denominador da fração.

  - Em um plano cartesiano xOy as equações $y = x - \pi$ e $y = 5 - x$ definem duas retas oblíquas, a primeira cortando o eixo Ox em $x = \pi$ e a segunda em $x = 5$.
    Veja um esboço do gráfico das duas retas:



  e o estudo da variação de sinal do quociente $\dfrac{x-\pi}{5-x}$:

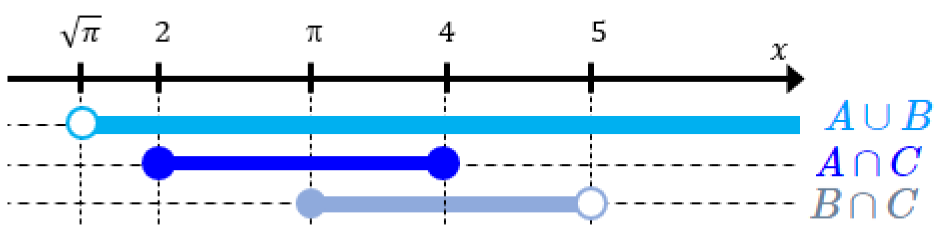


  Dessa forma, para que $\sqrt{\dfrac{x-\pi}{5-x}}$ seja um número real, devemos ter $\boxed{\pi \leqslant x < 5}$.

Pelo até aqui exposto, temos que:

- $A \cup B = d(f) =]\sqrt{\pi}, +\infty[$;
- $A \cap C = d(g) = [2, 4]$;
- $B \cap C = d(h) = [\pi, 5[$.

Agora, observe com atenção o diagrama abaixo.

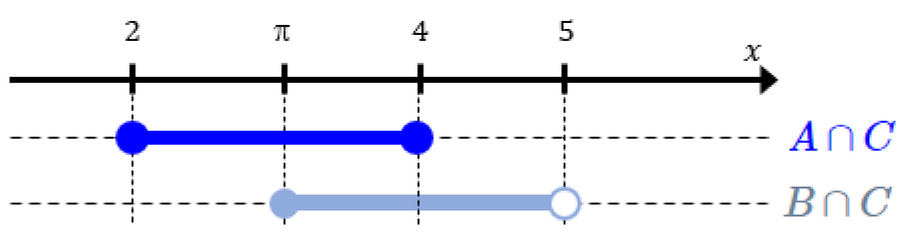


Como $A \cap C \subset C$ e $B \cap C \subset C$, então desse diagrama concluímos que $[2, 5[\subset C$.
Por outro lado, sabemos que $C \subset A \cup B$. Mas se existisse um elemento $z \in C$ tal que $z \in]\sqrt{\pi}, 2[\cup [5, +\infty[$ esse elemento z pertenceria a $A \cap C$ ou a $B \cap C$, o que observamos não acontecer.
Portanto, $\boxed{C = [2, 5[}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Antes de fazermos contas, poderíamos ter observado que $\boxed{C = (A \cap C) \cup (B \cap C)}$.
Assim, nem precisaríamos de todos os cálculos feitos na solução anterior para obtermos o domínio da função f.
Neste caso, aproveitando alguns cálculos da **Solução 1**, observamos o diagrama abaixo para efetuarmos a união $\boxed{(A \cap C) \cup (B \cap C)}$ e concluímos que $\boxed{C = [2, 5[}$.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.