

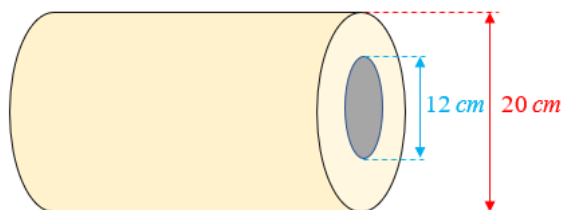
.Problema para ajudar na escola: Enrolando uma bobina



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Uma bobina com diâmetro interno de 12 cm ficou com um diâmetro externo (máximo) de 20 cm , depois que nela foi enrolada uma longa faixa de papel com espessura de $0,01\text{ cm}$, para produzir um "rolo de papel-toalha".



Qual é o comprimento da faixa de papel que foi enrolada?

Ajuda

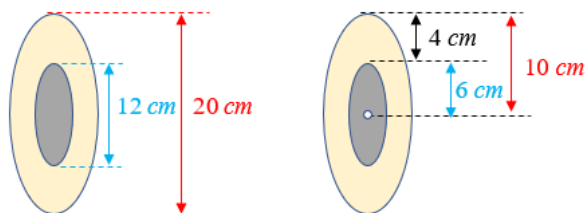
A soma dos t primeiros números naturais não nulos é dada por

$$1 + 2 + 3 + \dots + t = \frac{(1+t) \cdot t}{2} . \text{ (Se precisar, visite [esta página](#).)}$$

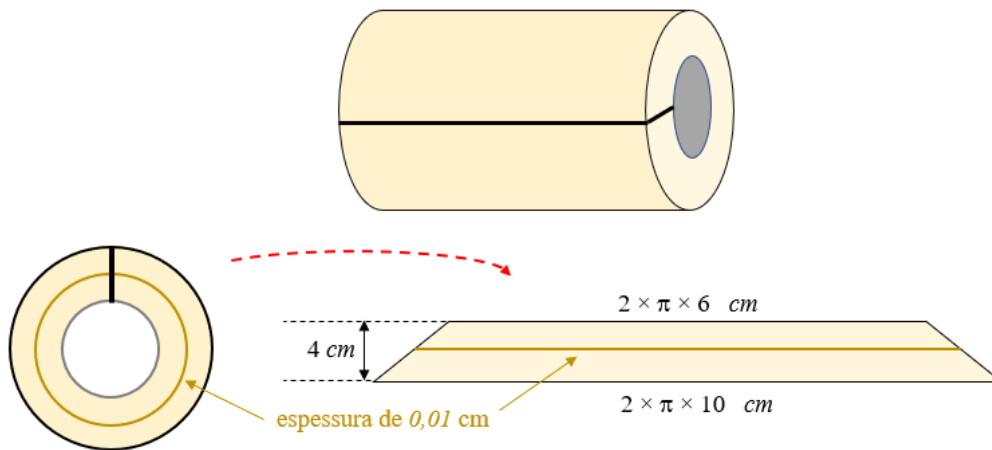


Solução

A bobina tem um diâmetro interno de 12 cm e um diâmetro externo máximo de 20 cm . Assim, quando vista de lado, a espessura da faixa de papel enrolada na bobina é de $\frac{20}{2} - \frac{12}{2} = 4\text{ cm}$, conforme podemos visualizar na figura a seguir.



A partir da espessura de $0,01\text{ cm}$ do papel, precisamos calcular quantas voltas foram dadas no "tubo interno" da bobina para que o "tubo" resultante do papel enrolado tenha a espessura de 4 cm . Olhando a base do tubo de papel de frente, é como se abrissemos um anel de papel, conseguindo um trapézio de altura 4 cm , formado por várias camadas: cada camada corresponde a uma volta do papel na bobina.



Indicando o número de voltas que produz a espessura de 4 cm por n , vamos fazer os cálculos utilizando uma regra de três:

espessura	—————	voltas ou camadas
$0,01\text{ cm}$	—————	1
4 cm	—————	n

Assim,

$$4 \times 1 = 0,01 \times n$$

$$n = \frac{4}{0,01} = 400 \text{ voltas ou camadas.}$$

Agora, para calcular o comprimento da faixa de papel que foi enrolada, imagine que você pegou faixa de papel de espessura $0,01\text{ cm}$ e foi enrolando em um cilindro de raio 6 cm até completar 400 voltas o que resultou em tubo de papel de espessura 4 cm . Assim, o comprimento total da faixa de papel é a soma do comprimento de cada uma das 400 voltas que foram dadas.

Mas é importante você perceber que cada volta tem um raio diferente: é o raio da volta anterior, acrescido dos $0,01\text{ cm}$ de espessura do papel. Veja:

volta	raio
1	6 (raio interno da bobina)
2	$6 + 0,01 = 6,01 = (6 + \frac{1}{100})$
3	$6,01 + 0,01 = 6,02 = (6 + \frac{2}{100})$
4	$6,02 + 0,01 = 6,03 = (6 + \frac{3}{100})$
⋮	⋮
100	$6,99 = (6 + \frac{99}{100})$
⋮	⋮
200	$7,99 = (6 + \frac{199}{100})$
⋮	⋮
300	$8,99 = (6 + \frac{299}{100})$
⋮	⋮
399	$9,98 = (6 + \frac{398}{100})$
400	$9,99 = (6 + \frac{399}{100})$

Conhecido o raio de cada volta, podemos calcular o comprimento da faixa de papel nela utilizado: o comprimento da faixa de papel em cada volta será o comprimento da circunferência com o raio dessa volta. Lembrando que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2 \cdot \pi \cdot r$, podemos obter o comprimento em cada volta.

volta	comprimento em cm
1	$2 \cdot \pi \cdot 6$
2	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{1}{100}\right)$
3	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{2}{100}\right)$
4	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{3}{100}\right)$
5	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{4}{100}\right)$
\vdots	\vdots
399	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{398}{100}\right)$
400	$2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{399}{100}\right)$

Finalmente, vamos somar todos os comprimentos das voltas para determinarmos o comprimento total C_t da faixa de papel que foi enrolada.

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{1}{100}\right) + 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{2}{100}\right) + 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{3}{100}\right) + 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{4}{100}\right) + \dots + 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \frac{399}{100}\right)$$

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot \left(6 + \left(6 + \frac{1}{100}\right) + \left(6 + \frac{2}{100}\right) + \left(6 + \frac{3}{100}\right) + \left(6 + \frac{4}{100}\right) + \dots + \left(6 + \frac{399}{100}\right)\right)$$

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot \left(400 \cdot 6 + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \frac{4}{100} + \dots + \frac{399}{100}\right)\right)$$

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot \left(2400 + \frac{1}{100} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 399)\right).$$

Pela fórmula do Lembrete,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 399 = \frac{(1 + 399) \cdot 399}{2} = 79800,$$

logo:

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot \left(2400 + \frac{1}{100} \cdot 79800\right)$$

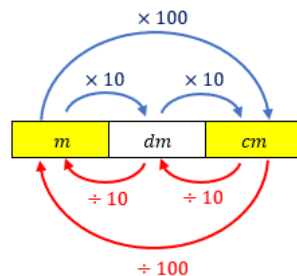
$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot (2400 + 798)$$

$$C_t = 2 \cdot \pi \cdot 3198$$

$$C_t = 6396 \cdot \pi.$$

Portanto, o comprimento da faixa de papel que foi enrolada é $6396\pi \text{ cm}$ ou aproximadamente $20\,083 \text{ cm}$.

O esquema de conversão abaixo permite concluir que o comprimento da faixa de papel é aproximadamente 201 metros .



Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

