.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a vigésima de suas 40 equações

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.- Nível de dificuldade: Difícil**)**

(**ONEM**, 2005) Determine os números inteiros m e n que satisfazem a seguinte equação: $\boxed{2^n+3^m=3^{m+2}-2^{n+1}}$.

Solução

Sabemos que em um produto de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes. Assim:

$$2^{n+1}=2^n\cdot 2^1=2\cdot 2^n \qquad \text{e} \qquad 3^{m+2}=3^m\cdot 3^2=9\cdot 3^m\ ,$$

donde obtemos a seguinte sequência de igualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
&2^n+3^m=3^{m+2}-2^{n+1}\iff\\
&\iff 2^n+3^m=9\cdot 3^m-2\cdot 2^n\iff\\
&\iff 2^n+2\cdot 2^n=9\cdot 3^m-3^m\iff\\
&\iff 3\cdot 2^n=8\cdot 3^m\iff\\
&\iff \begin{cases}\dfrac{2^n}{2^3}=\dfrac{3^m}{3^1}\ ; & (i)\\[2mm] \dfrac{3^1}{3^m}=\dfrac{2^3}{2^n}\ . & (ii)\end{cases}
\end{aligned}$$

Mas sabemos também que em um quociente de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes. Dessa forma, seguem de (i) e de (ii) duas igualdades bem estranhas:

$$2^{n-3}=3^{m-1}; \qquad (iii)$$
$$3^{1-m}=2^{3-n}. \qquad (iv)$$

De toda forma, como

$$\boxed{2^n+3^m=3^{m+2}-2^{n+1}\iff 2^{n-3}=3^{m-1}}$$

e

$$\boxed{2^n+3^m=3^{m+2}-2^{n+1}\iff 3^{1-m}=2^{3-n}},$$

vamos utilizar as igualdades (iii) e (iv). Para isso, vamos analisar os seguintes casos: $m-1>0$; $m-1<0$; $m-1=0$.

- Se $m-1>0$, então o número do lado direito de (iii) é um número natural; logo, o lado esquerdo também é, o que nos garante que $n-3>0$.
  Consequentemente o lado esquerdo de (iii) é um número par, enquanto o lado direito é um número ímpar.
  Como não existe um número natural simultaneamente par e ímpar, este primeiro caso não ocorre.
- Se $m-1<0$, então $1-m>0$. Com isso, vemos que o número que aparece do lado esquerdo da igualdade (iv) é um número natural, o que obriga que o lado direito da igualdade também seja um número natural, donde $3-n>0$. Assim, o lado direito da igualdade (iv) nos mostra um número par, o que é impossível, pois o lado direito nos mostra um número ímpar.
  Logo, este segundo caso também não ocorre!

Como $m-1$ é um número inteiro não positivo e não negativo, necessariamente temos $m-1=0$, ou seja, $m=1$. Com isso, tanto a igualdade (iii) como a (iv) nos mostram que $n=3$.
Portanto, os números inteiros m e n que satisfazem a equação dada no problema são $\boxed{m=1}$ e $\boxed{n=3}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.