# .Problema para ajudar na escola: Três conjuntos de números reais

## Problema

**(A partir da 1ª série do E. M.-** Nível de dificuldade: Muito Difícil**)**

(**ITA**, 2007) Os conjuntos de números reais $A, B$ e $C$ são assim definidos:

$$A \cup B \cup C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x^2 + x \geqslant 2\right\};$$

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\right\};$$

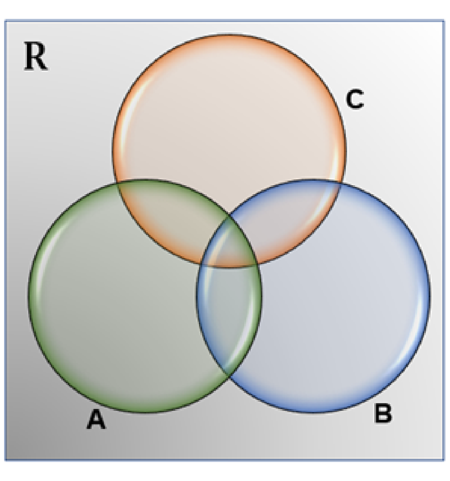
$$A \cap C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } log\,(x+4) \leqslant 0\};$$

$$B \cap C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leqslant 2x + 7 < 2\}.$$

**Determine** $C$ **.**

## Solução

Inicialmente, observe que não temos uma definição direta do conjunto $C$, precisaremos utilizar os conjuntos definidos no problema e obter $C$ a partir de operações entre conjuntos.
Observando o diagrama de Venn ao lado, vemos que




- $[(A \cup B \cup C) - (A \cup B)] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] = C.$

Ingenuamente podemos entender essa igualdade observando que ao fazermos a diferença $(A \cup B \cup C) - (A \cup B)$, apagamos de $C$ os elementos que também pertencem a $A$ e a $B$; mas com a união das interseções $A \cap C$ e $B \cap C$ trouxemos de volta para $C$ os elementos de $A$ que pertencem a $C$ e também os elementos de $B$ que pertencem a $C$.
Dessa forma, precisamos determinar, de fato, os conjuntos $A \cup B \cup C$, $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$; e, para isso, vamos, a princípio, analisar separadamente as desigualdades que os definem.

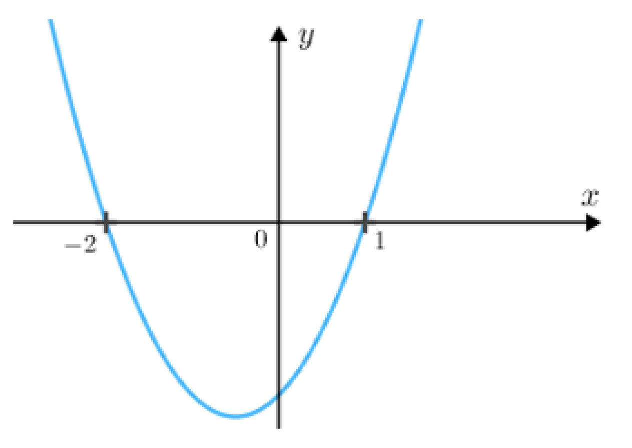
$(i)$ $\boxed{x^2 + x \geqslant 2}$

Note que a desigualdade $\boxed{x^2 + x \geqslant 2}$ é equivalente à desigualdade $\boxed{x^2 + x - 2 \geqslant 0}$ e para resolver esta segunda desigualdade em $\mathbb{R}$ precisamos procurar números reais $x$ que tornem a expressão $x^2 + x - 2$ não negativa. Para tal vamos fazer a análise da variação de sinal dessa expressão.
Uma maneira rápida de estudarmos o sinal dessa expressão é observarmos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x - 2$. Em um plano cartesiano $xOy$ esse gráfico é uma parábola com diretriz paralela ao eixo $OX$ e concavidade voltada para cima. Para traçar o gráfico de $f$ e analisar a variação de sinal, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $x^2 + x - 2 = 0$; são elas:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{2}{2} = 1} \text{ e } \boxed{x_2 = -\frac{4}{2} = -2}.$$

Mesmo sem as coordenadas do vértice da parábola, somente sabendo que essa parábola tem concavidade voltada para cima, já temos condições de analisar a variação de sinal da expressão $x^2 + x - 2$; observe:





Observando os valores de $x$ para os quais a função $f$ é não negativa, concluímos que a desigualdade $x^2 + x \geqslant 2$, e consequentemente $x^2 + x - 2 \geqslant 0$, é satisfeita para valores reais de $x$ tais que $\boxed{x \leqslant -2}$ ou $\boxed{x \geqslant 1}$.

$(ii)$ $\boxed{8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0}$

Iniciamos este caso, observando a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0 \iff \left(2^3\right)^{-x} - 3 \cdot \left(2^2\right)^{-x} - 2^2 \cdot 2^{-x} > 0 \iff$$
$$\iff (2^{-x})^3 - 3 \cdot (2^{-x})^2 - 2^2 \cdot (2^{-x}) > 0 \iff (2^{-x}) \left[(2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4\right] > 0.$$

Como $(2^{-x}) > 0$, a sequência de desigualdades finaliza assim:

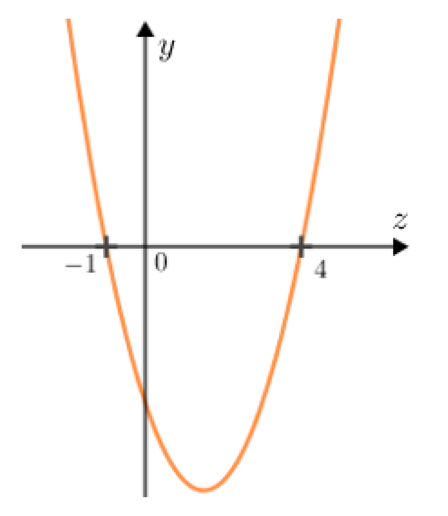
$$8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0 \iff \cdots \iff$$
$$\iff (2^{-x}) \left[(2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4\right] > 0 \iff (2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4 > 0.$$

Portanto, como as desigualdades $\boxed{8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0}$ e $\boxed{(2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4 > 0}$ são equivalentes, vamos resolver a segunda.
Perceba que se fizermos $z = 2^{-x}$ a desigualdade exponencial $(2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4 > 0$ se transforma na desigualdade do segundo grau $z^2 - 3z - 4 > 0$, que pode ser resolvida fazendo-se a análise de sinal da expressão $z^2 - 3z - 4$.
Aqui vamos analisar a variação de sinal da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(z) = z^2 - 3z - 4$ para determinar para quais valores de $z$ a função $g$ é positiva. O gráfico de $g$ em um plano cartesiano $zOy$ é uma parábola com diretriz paralela ao eixo $OZ$ e concavidade voltada para cima. Para traçar o gráfico de $g$ vamos encontrar as raízes da equação de segundo grau $z^2 - 3z - 4 = 0$:

$$z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\boxed{z_1 = \frac{8}{2} = 4} \text{ e } \boxed{z_2 = -\frac{2}{2} = -1}.$$

Novamente, mesmo sem as coordenadas do vértice da parábola, somente sabendo que ela tem concavidade voltada para cima, já temos condições de analisar a variação de sinal da expressão $z^2 - 3z - 4$; observe:





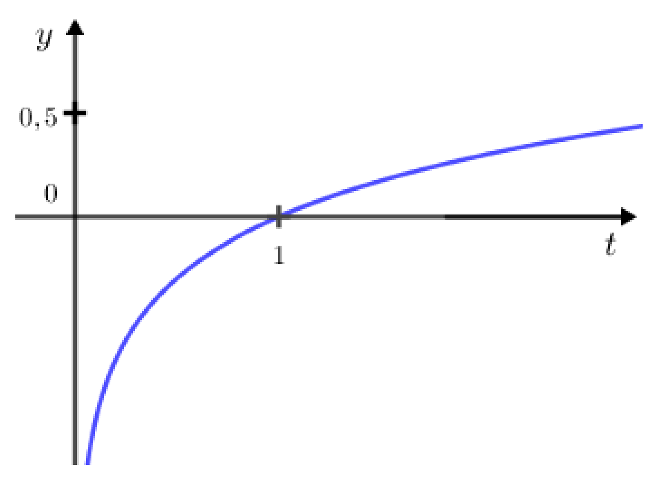
Observando os valores de $z$ para os quais a função $g$ é positiva, concluímos que a desigualdade $z^2 - 3z - 4 > 0$ é satisfeita para valores reais de $z$ tais que $z < -1$ ou $z > 4$.
Mas $z = 2^{-x}$, assim as desigualdades equivalentes $\boxed{8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0}$ e $\boxed{(2^{-x})^2 - 3 \cdot (2^{-x}) - 4 > 0}$ são satisfeitas para valores de $x$ tais que $2^{-x} < -1$ ou $2^{-x} > 4$.
Mas observe que $2^{-x} > 0$, logo a condição $2^{-x} < -1$ não ocorre. Da segunda condição, segue que:

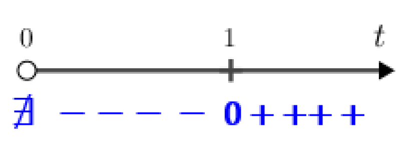
$$2^{-x} > 4 \iff 2^{-x} > 2^2 \iff -x > 2 \iff x < -2,$$

e assim a desigualdade $\boxed{8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0}$ é satisfeita para valores reais de $x$ tais que $\boxed{x < -2}$.

$(iii)$ $\boxed{log\,(x+4) \leqslant 0}$

Aqui, faremos $x + 4 = t$ e analisaremos a variação de sinal da função $h : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = log(t)$.
O gráfico de $h$ aparece no lado esquerdo da figura abaixo e a variação de sinal da função $h$ aparece do lado direito.




Observando os valores de $t$ para os quais a função $h$ é não positiva, concluímos que a desigualdade $log(t) \leqslant 0$ é satisfeita para valores reais de $t$ tais que $0 < t \leqslant 1$. Assim, como $t = x + 4$, concluímos que $\boxed{log\,(x+4) \leqslant 0}$ para valores reais de $x$ tais que $0 < x + 4 \leqslant 1$, ou seja valores reais de $x$ tais que $\boxed{-4 < x \leqslant -3}$.

$(iv)$ $\boxed{0 \leqslant 2x + 7 < 2}$

Para esta última desigualdade não faremos gráfico; apenas fazendo manipulações algébricas determinaremos os valores de $x$ que nos interessam.
Observe esta sequência de desigualdades equivalentes:

$$0 \leqslant 2x + 7 < 2 \iff -7 \leqslant 2x < -5 \iff -\frac{7}{2} \leqslant x < -\frac{5}{2}.$$

Assim, vemos que $\boxed{0 \leqslant 2x + 7 < 2}$ para valores reais de $x$ tais que $\boxed{-\frac{7}{2} \leqslant x < -\frac{5}{2}}$.

Dessa forma, temos que:

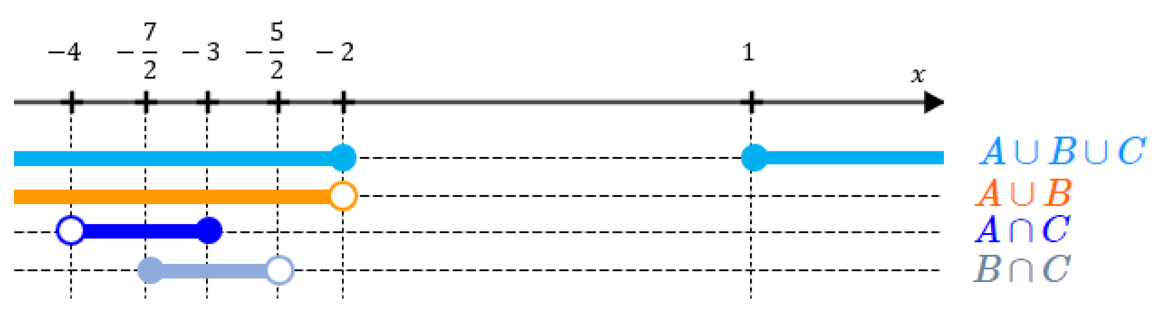
$$A \cup B \cup C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } \boxed{x \leqslant -2} \text{ ou } \boxed{x \geqslant 1}\right\};$$

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } \boxed{x < -2}\right\};$$

$$A \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } \boxed{-4 < x \leqslant -3}\right\};$$

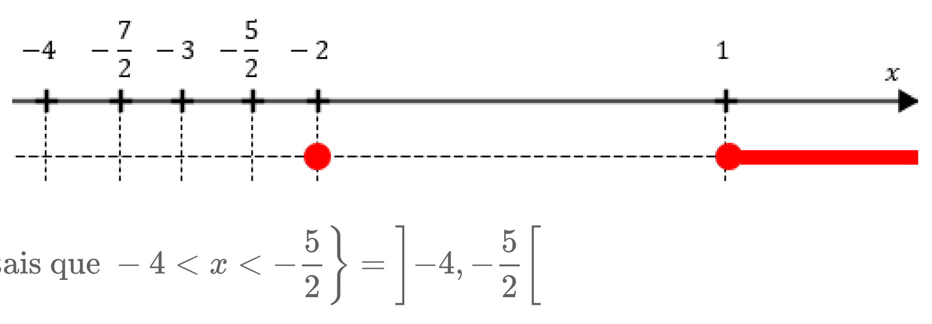
$$B \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } \boxed{-\tfrac{7}{2} \leqslant x < -\tfrac{5}{2}}\right\}.$$

Lembrando que $[(A \cup B \cup C) - (A \cup B)] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] = C$, vamos visualizar juntos os quatro conjuntos.

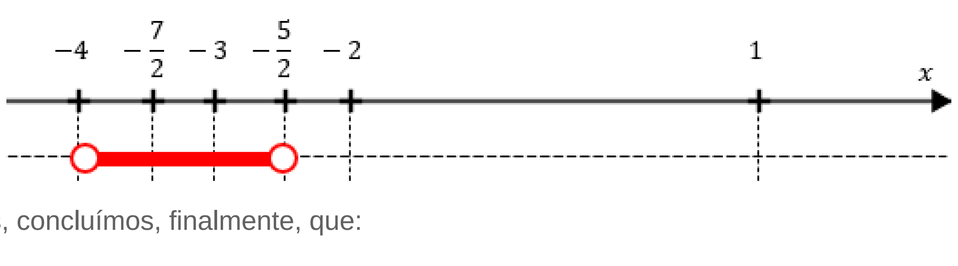



Observe que:

- $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x = -2 \text{ ou } x \geqslant 1\} = \{-2\} \cup [1, +\infty[$




- $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -4 < x < -\frac{5}{2}\right\} = \left]-4, -\frac{5}{2}\right[$

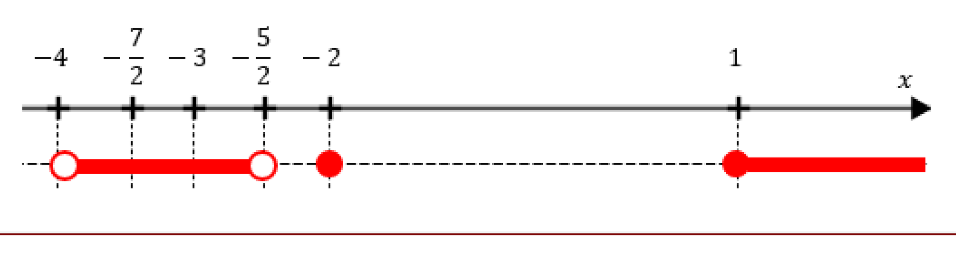



Fazendo a união desses dois conjuntos, concluímos, finalmente, que:

$$\boxed{C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -4 < x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x \geqslant 1\right\}},$$

ou seja,

$$\boxed{C = \left]-4, -\tfrac{5}{2}\right[ \cup \{-2\} \cup [1, +\infty[}.$$




Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.