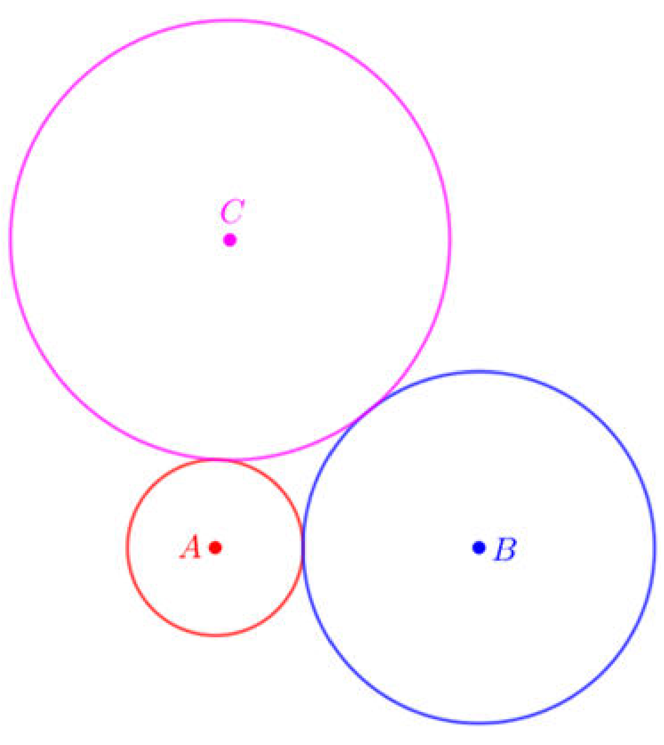
.Problema para ajudar na escola: Três circunferências e um triângulo

Problema

(A partir da 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil**)**

Na figura abaixo, vemos três circunferências coplanares, duas a duas tangentes exteriores, com centros nos pontos ***A***, ***B*** e ***C*** e com raios medindo 2 cm, 4 cm e 5 cm respectivamente.



Determinar a área e o perímetro do triângulo *ABC*.

Um desafio extra: Usando régua e compasso, você saberia construir essas três circunferências a partir das medidas dos três raios?
Você não deve estar acostumado a esse tipo de construção. Mas, acredite, não é difícil fazê-la e é um belo passatempo. Para esquentar os motores, faça primeiro uma construção mais simples:

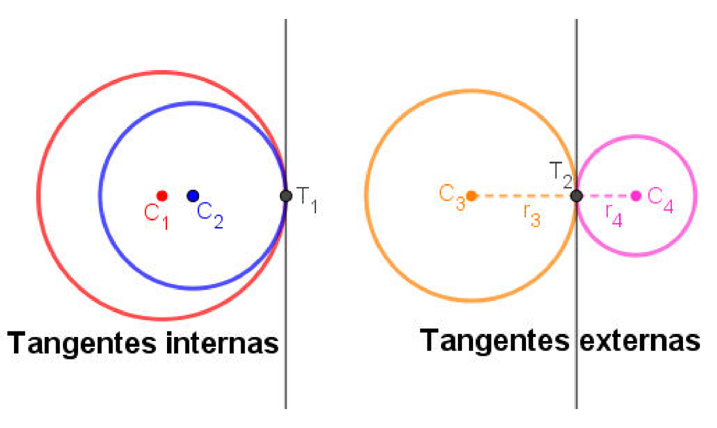
- Conhecendo a medida dos raios de duas circunferências não tangentes entre si (nem interior nem exteriormente), construa uma terceira que seja tangente exterior às duas iniciais.

Bom divertimento!

Ajuda 1

Quando em um mesmo plano traçamos duas circunferências, podemos analisar as posições que uma ocupa com relação à outra. Particularmente, duas circunferências que estão no mesmo plano são **tangentes** uma à outra se elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto de tangência:

- se os seus centros estão de um mesmo lado com relação à reta tangente comum a elas, as circunferências são ditas **tangentes internas**;
- se os seus centros estão em lados opostos com relação à reta tangente comum a elas, as circunferências são ditas **tangentes externas**.



Uma característica importante de duas circunferências tangentes externas é que **a soma de seus raios é igual à distância entre seus centros**.

Ajuda 2

Heron de Alexandria (± 10 – 70), ou ainda Hero ou Herão, foi um matemático grego. É dele a fórmula que nos permite calcular a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados.
Em um triângulo de lados medindo $a,\ b,\ c$, a fórmula de Herão nos garante que a área A desse triângulo é:

$$A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},$$

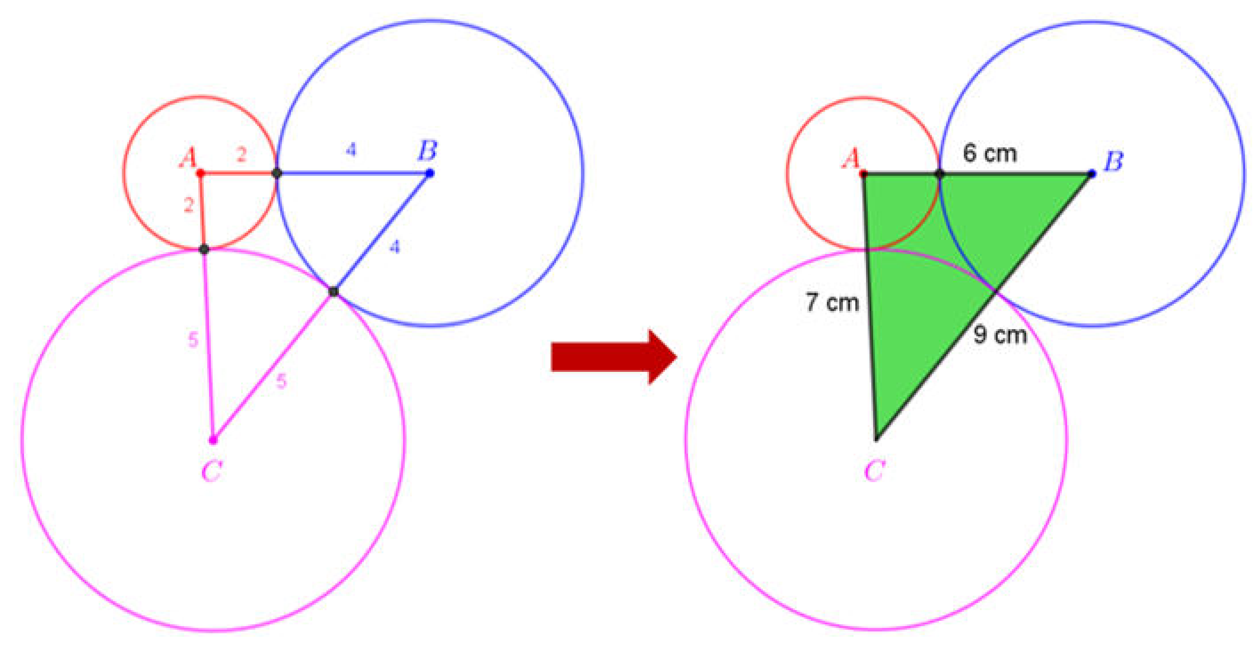
onde p é o semiperímetro do triângulo em questão, ou seja, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

– Para rever esse tema, clique **AQUI**.

– Para aprender um pouco mais sobre esse tema, clique **AQUI**.

Solução

Utilizando a propriedade explicitada na **Ajuda 1** de que a distância entre os centros de duas circunferências tangentes externas entre si é a soma dos comprimentos de seus raios, concluímos que os lados do triângulo ABC medem 6 cm, 7 cm e 9 cm.



Assim:

- o perímetro P do triângulo ABC é $\boxed{P=6+7+9=22\text{ cm}}$;
- como o semiperímetro do triângulo ABC é $p=11\text{ cm}$, a fórmula de Herão citada na **Ajuda 2** nos garante que a área A desse triângulo pode ser assim calculada:

$$A=\sqrt{11\cdot(11-6)\cdot(11-7)\cdot(11-9)}$$
$$A=\sqrt{11\cdot 5\cdot 4\cdot 2}$$
$$\boxed{A=2\cdot\sqrt{110}\text{ cm}^2}$$
$$\boxed{A\approx 21\text{ cm}^2}.$$

Um applet para ajudar no desafio

No aplicativo estão definidos três segmentos de reta, com comprimentos 2 cm, 4 cm e 5 cm, respectivamente. Essas são as medidas do raios das três circunferências que iremos construir e estes são os passos que podem ser executados para a construção das três circunferências a partir dessas medidas de raios:

Passo 1: Com a régua, construa uma reta auxiliar r e nela marque o ponto A.

Passo 2: Com o compasso, transfira a medida do segmento $\overline{P_1Q_1}$ para a reta r, a partir de A. Para isso, construa um segmento $\overline{AT_1}$ sobre r que seja congruente ao segmento $\overline{P_1Q_1}$ e, portanto, tenha comprimento 2 cm. Marque o ponto T_1 à direita de A .

Passo 3: Com o compasso, construa a circunferência λ_1 de centro em A e que passa por T_1. Essa será a nossa circunferência de raio 2 cm.

Passo 4: Use novamente o compasso e transfira a medida do segmento $\overline{P_2Q_2}$ para a reta r. Para isso, construa um segmento $\overline{T_1B}$ sobre r que seja congruente ao segmento $\overline{P_2Q_2}$ e, portanto, tenha comprimento 4 cm. Marque o ponto B à direita de T_1 .

Passo 5: Com o compasso, construa a circunferência λ_2 de centro em B e que passa por T_1. Essa será a nossa circunferência de raio 4 cm.

Já temos duas circunferências tangentes externas com raios de comprimentos 2 cm e 4 cm. O ponto T_1 é o ponto de tangência das duas circunferências.
Vamos construir uma terceira circunferência, λ_3, que tenha raio de 5 cm e que seja tangente externa às duas circunferências λ_1 e λ_2. A ideia é fazer, inicialmente, o **Passo 4** e transportar a medida do segmento $\overline{P_3Q_3}$ a partir de λ_1 e de λ_2. Para isso, vamos construir mais duas retas auxiliares para "somarmos" os raios 2 cm e 5 cm, assim como os raios 4 cm e 5 cm .

Passo 6: Com a régua, construa uma reta auxiliar r_1 que contenha o ponto A e denomine C_1 uma das interseções de r_1 com λ_1.

Passo 7: Com a régua, construa uma reta auxiliar r_2 que contenha o ponto B e denomine C_2 uma das interseções de r_2 com λ_2.

Passo 8: Use o compasso e transfira a medida do segmento $\overline{P_3Q_3}$ para a reta r_1, a partir de C_1. Para isso, construa um segmento $\overline{C_1D_1}$ sobre r_1 que seja congruente ao segmento $\overline{P_3Q_3}$ e, portanto, tenha comprimento 5 cm. Pela maneira com que construímos r_1 e escolhemos C_1, marque o ponto D_1 abaixo de C_1 .

Passo 9: Use o compasso e transfira a medida do segmento $\overline{P_3Q_3}$ para a reta r_2, a partir de C_2. Para isso, construa um segmento $\overline{C_2D_2}$ sobre r_2 que seja congruente ao segmento $\overline{P_3Q_3}$ e, portanto, tenha comprimento 5 cm. Pela maneira com que construímos r_2 e escolhemos C_2, marque o ponto D_2 abaixo de C_2 .

Perceba que:

- a circunferência de centro em A e que passa por D_1 contém todos os possíveis centros de circunferência com raios 5 cm que são tangentes à circunferência λ_1;
- a circunferência de centro em B e que passa por D_2 contém todos os possíveis centros de circunferência com raios 5 cm que são tangentes à circunferência λ_2.

Assim, as interseções dessas duas circunferências nos fornecerão pontos que são centros de circunferência com raios 5 cm que são tangentes simultaneamente às circunferências λ_1 e λ_2. Para não sobrecarregar o nosso desenho, ao invés de traçarmos essas duas circunferências, traçaremos apenas arcos delas: γ_1 e γ_2.

Passo 10: Com o compasso, construa o arco de circunferência γ_1 de centro em A e que passa por D_1.

Passo 11: Com o compasso, construa o arco de circunferência γ_2 de centro em B e que passa por D_2.

Finalmente temos o centro da nossa terceira circunferência, λ_3.

Passo 12: Denote por C a interseção dos arcos γ_1 e γ_2.

Passo 13: Com o compasso tome a medida do segmento $\overline{P_3Q_3}$ e, com essa medida, trace a circunferência λ_3 com centro em C e o raio com a medida do segmento $\overline{P_3Q_3}$.

Passo 14: Observe o ponto de tangência T_2 das circunferências λ_1 e λ_3 e o ponto de tangência T_3 das circunferências λ_2 e λ_3.

Instruções para utilização do applet:
(1) Espere o applet carregar. (O aplicativo pode demorar um pouquinho para carregar.)
(2) Para acompanhar os passos definidos para a construção das circunferências, clique sucessivamente nos quadradinhos que irão aparecer.
(3) Para retornar à configuração inicial, clique nas setinhas que aparecem no canto superior direito do aplicativo.

Clique AQUI para abrir o applet.
OBMEP_ srdg, aplicativo criado com o GeoGebra

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Deixe uma resposta

Você precisa fazer o login para publicar um comentário.