Soluções de um sistema

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Médio**)**

(**IME**, 2016 – Adaptado) Quantas soluções inteiras o sistema de inequações

$$\begin{cases} x \leqslant 10 \\ \dfrac{x^2-2x-14}{3x} > 1 \end{cases}$$

admite?

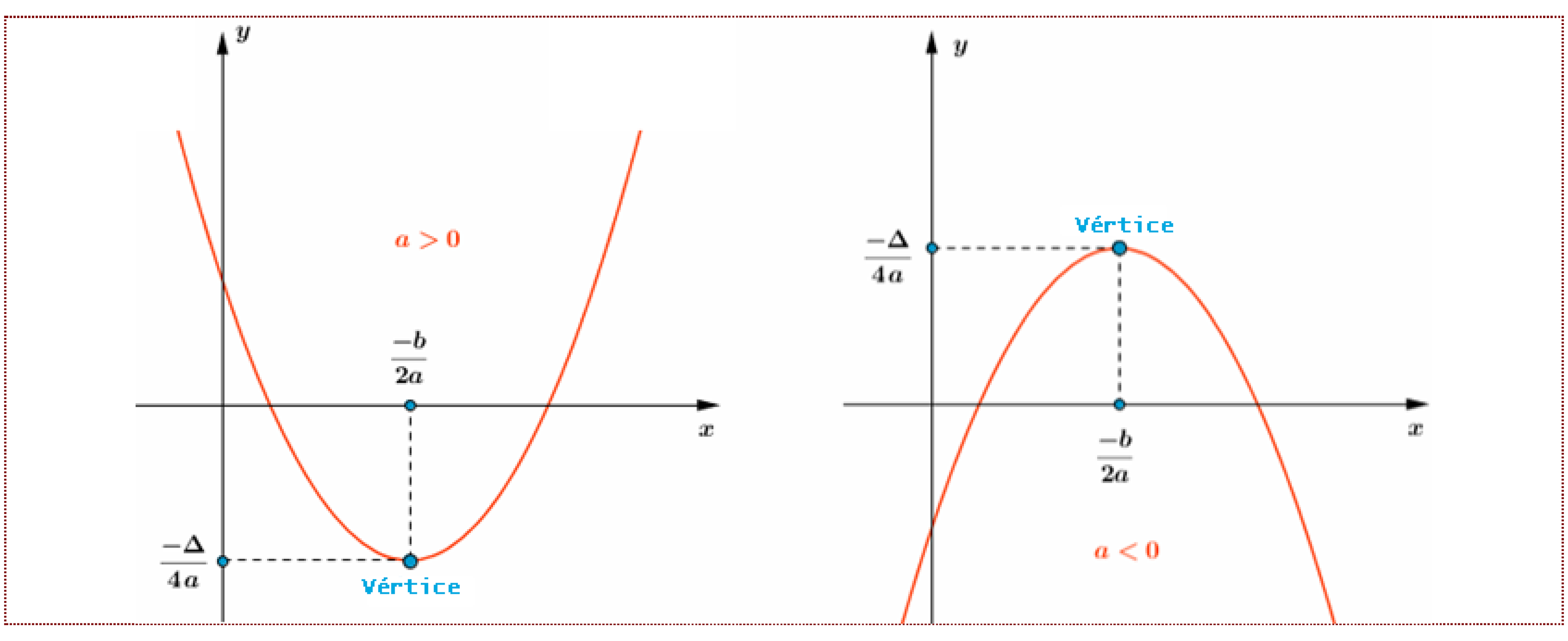
Lembretes

(1) O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

(2) Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $(x_v,y_v)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Visualizem abaixo as informações fornecidas no lembrete (2), se $\Delta>0$.



Solução

Observe, inicialmente, a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\boxed{\frac{x^2-2x-14}{3x}>1} \iff \frac{x^2-2x-14}{3x}-1>0 \iff \frac{x^2-2x-14}{3x}-\frac{3x}{3x}>0 \iff$$
$$\iff \frac{x^2-5x-14}{3x}>0 \iff \boxed{\frac{x^2-5x-14}{x}>0}.$$

Assim, para determinarmos os valores inteiros de x que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x \leqslant 10 \\ \dfrac{x^2-2x-14}{3x} > 1 \end{cases}$$

determinaremos os valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $\dfrac{x^2-5x-14}{x}>0$ e verificaremos quais desses valores satisfazem a condição $x\leqslant 10$.

Para determinar os valores de x para os quais a expressão é positiva, vamos estudar a variação de sinal da expressão $\dfrac{x^2-5x-14}{x}$.

Para isso, inicialmente faremos um esboço dos gráficos das funções $f,\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2-5x-14$ e $g(x)=x$ e analisaremos o sinal de cada uma.

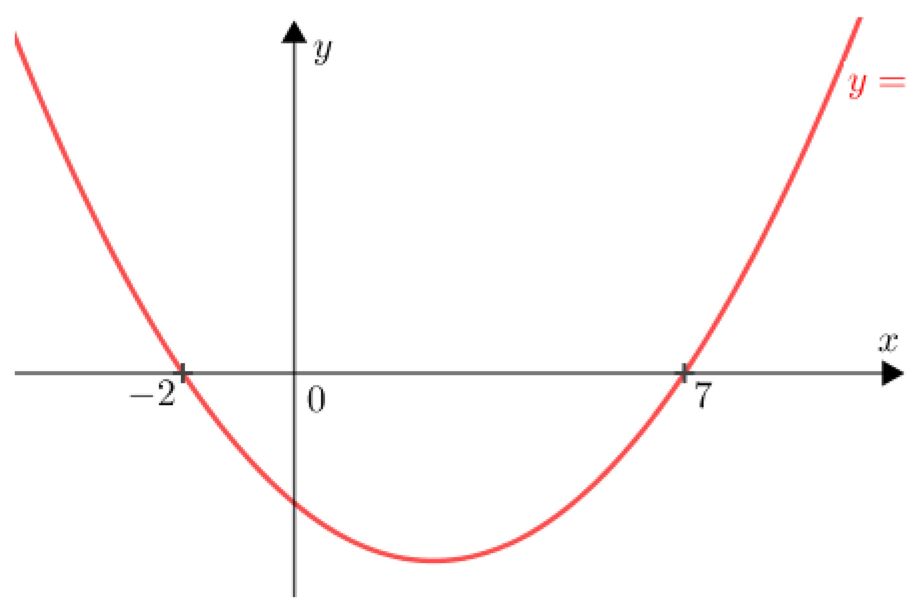
Lembramos que analisar o sinal de uma função significa determinar quais valores do seu domínio têm imagens iguais a zero, quais têm imagens positivas e quais têm imagens negativas.

Vamos lá!

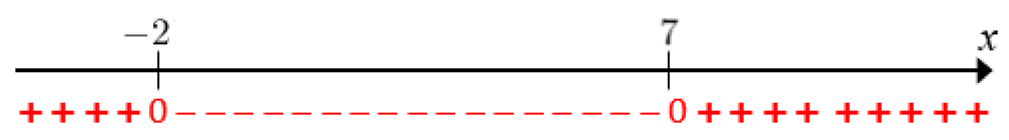
- Em um plano cartesiano xOy o gráfico de f é uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para cima. Para traçar esse gráfico e analisar a variação de sinal, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $x^2-5x-14=0$; são elas:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{81}}{6}$$
$$x_1=\frac{5-9}{2}=-2 \quad \text{e} \quad x_2=\frac{5+9}{2}=7.$$

Veja um esboço do gráfico de f:

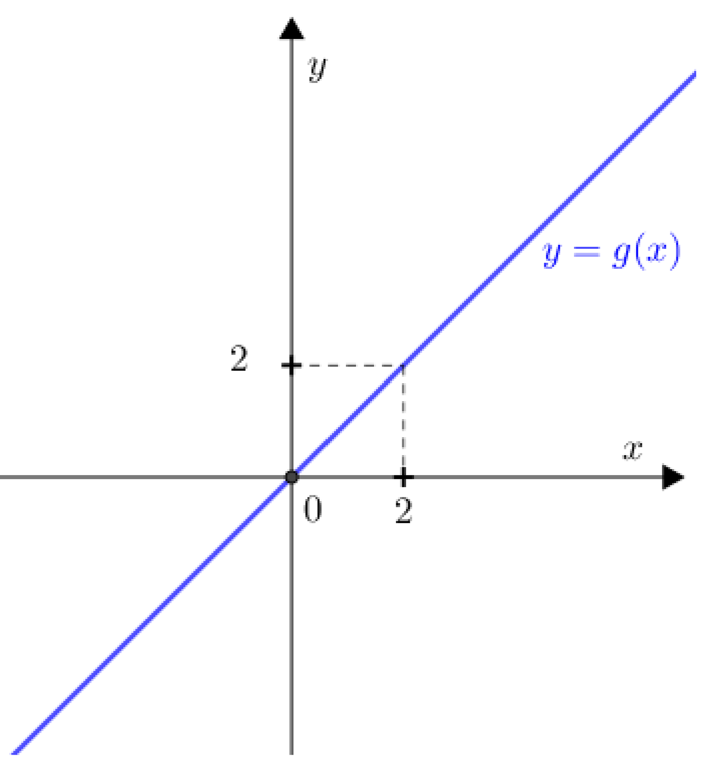


e sua variação de sinal:

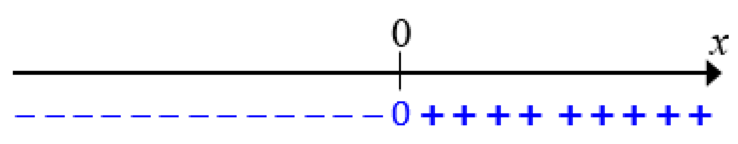


- Em um plano cartesiano xOy o gráfico de g é uma reta que passa pela origem e pelo ponto de coordenadas $(2,2)$, por exemplo.

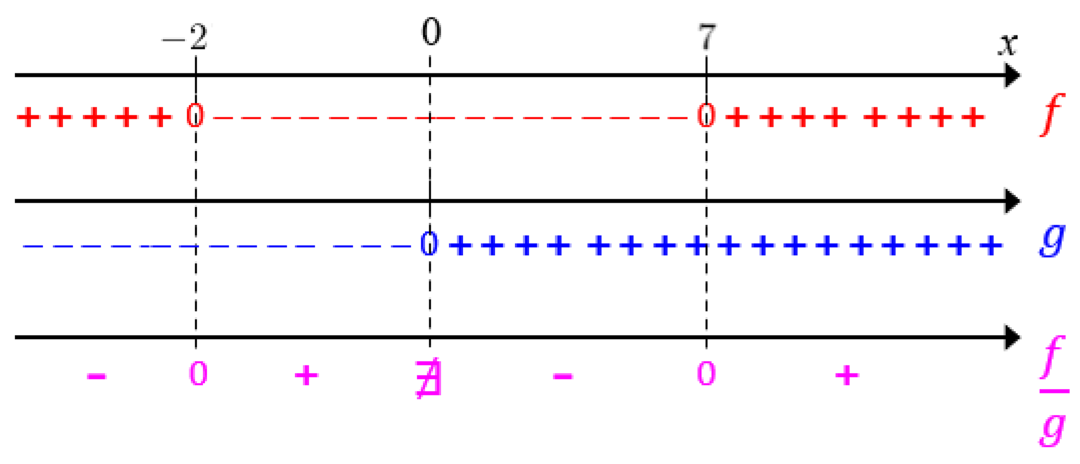
Assim, temos um esboço do gráfico de g:



e sua variação de sinal:



Temos então o seguinte quadro final com a variação de sinais da f, da g e da $\dfrac{f}{g}$:



Portanto, os valores reais de x que satisfazem a inequação $\dfrac{x^2-5x-14}{x}>0$ são tais que $-2<x<0$ ou $x>7$.

Dentre esses números reais, são inteiros e menores do que ou iguais a 10 os seguintes valores: $-1,\ 8,\ 9$ e 10.

Assim, o sistema de inequações apresentado no problema tem $\boxed{4}$ soluções.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.