.Problema para ajudar na escola: Par, ímpar

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.- Nível de dificuldade: Difícil)

(**UNICAMP**, 2004) Considere o conjunto dos dígitos $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e forme com eles números de nove algarismos distintos.
(a) Quantos desses números serão pares?
(b) Escolhendo-se ao acaso um dos números do item **(a)**, qual a probabilidade de que este número tenha exatamente dois dígitos ímpares juntos?

Lembrete

Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para k eventos: Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,
- $\cdots$
- um evento **Ek** puder ocorrer de m_k maneiras

e todos esses eventos forem independentes entre si, então a quantidade de maneiras em que os k eventos ocorrem ao mesmo tempo é

$\boxed{m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k}$.

(Se você não se lembra desse Princípio, seria interessante dar uma passadinha **nesta Sala de Estudo**.)

Solução

(a) Observe que os números pares que podemos formar com os algarismos $1, 2, 3, \ldots, 9$ são aqueles que terminam em $2, 4, 6$ ou 8. Dessa forma, vamos dividir a nossa contagem de números pares de nove algarismos distintos que podemos formar com algarismos $1, 2, 3, \ldots, 9$ em dois eventos: a escolha do último dígito e a escolha dos outros oito dígitos. Utilizando a notação do **Lembrete**, calcularemos m_1 e m_2 e a resposta deste item será o produto $m_1 \times m_2$.

- **Evento 1:** Escolha do último dígito

  Podemos escolher o último dígito de 4 maneiras diferentes: ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
  Logo, $\boxed{m_1 = 4}$.

- **Evento 2:** Escolha dos demais dígitos

  Vamos dividir este evento em oito etapas independentes entre si: escolha do primeiro dígito, escolha do segundo dígito, …, escolha do oitavo dígito; e aplicar o **Princípio Fundamental da Contagem** para calcular a quantidade de maneiras em que esses oito eventos ocorrem ao mesmo tempo obtendo, então, m_2.
  Observe que, dos nove algarismos disponíveis, restam oito, já que utilizamos um deles como último dígito. Podemos então escolher o primeiro dígito de 8 maneiras diferentes; o segundo, de 7 maneiras; o terceiro de 6 e assim sucessivamente até o oitavo dígito.
  O esqueminha abaixo ajuda na visualização da contagem.

8 escolhas	7 escolhas	6 escolhas	5 escolhas	4 escolhas	3 escolhas	2 escolhas	1 escolha
1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito	5º dígito	6º dígito	7º dígito	8º dígito

  Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, segue que:
  $m_2 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$,
  ou seja, $\boxed{m_2 = 40\,320}$.

Portanto, podemos formar $4 \times 40\,320 = \boxed{161\,280}$ números pares com nove algarismos distintos utilizando o conjunto dos dígitos $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.
Observação: Se você sabe o que é uma Permutação, você poderia ter obtido o valor de m_2 rapidamente, já que a escolha dos oito primeiros dígitos dos números pares que queremos contar é, simplesmente, o número de permutações de oito objetos distintos, isto é, $m_2 = 8!$.
Dessa forma, igualmente, o resultado final seria $m_1 \times m_2 = 4 \times 8! = 161\,280$.

(b) A escolha de dígitos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ para se formar com eles números pares de nove algarismos distintos é um experimento aleatório cujo espaço amostral, embora com muitos elementos, é finito e equiprovável. Assim, escolhendo-se ao acaso um dos números do item **(a)**, a probabilidade P de que este número tenha exatamente dois dígitos ímpares juntos é dada pela razão entre "casos favoráveis" e "casos possíveis", ou seja:

$$\textbf{Probabilidade} = \frac{\textbf{quantidade de números que tenham exatamente dois dígitos ímpares juntos}}{\textbf{161280}}$$

Para que um número par com nove dígitos distintos e todos os nove diferentes de 0 tenha exatamente dois algarismos ímpares em posições consecutivas, esse número deve ter uma das seguintes formas:
$\boxed{ipipipiip}$; $\boxed{ipipiipip}$; $\boxed{ipiipipip}$; $\boxed{iipipipip}$.
Vamos fazer a contagem do total de números com essas quatro formas separadamente.

- **Forma** $\boxed{ipipipiip}$:

  Temos cinco algarismos ímpares para ocuparem cinco posições e quatro algarismos pares para ocuparem quatro posições:

i	p	i	p	i	p	i	i	p
5 alg.	4 alg.	4 alg.	3 alg.	3 alg.	2 alg.	2 alg.	1 alg.	1 alg.

  Assim, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**

  - os algarismos ímpares poderão ser escolhidos de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ modos distintos;
  - os algarismos pares poderão ser escolhidos de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ modos distintos;

  e, portanto, temos $\boxed{5! \times 4!}$ modos de formar esses tipos de números.

As próximas contagens serão idênticas a esta que acabamos de fazer, mas vamos explicitá-las para um melhor entendimento!

- **Forma** $\boxed{ipipiipip}$:

  Temos cinco algarismos ímpares para ocuparem cinco posições e quatro algarismos pares para ocuparem quatro posições:

i	p	i	p	i	i	p	i	p
5 alg.	4 alg.	4 alg.	3 alg.	3 alg.	2 alg.	2 alg.	1 alg.	1 alg.

  Assim, pelo **Princípio Fundamental da Contagem** temos $\boxed{5! \times 4!}$ modos de formar esse tipo de números.

- **Forma** $\boxed{ipiipipip}$:

  Temos cinco algarismos ímpares para ocuparem cinco posições e quatro algarismos pares para ocuparem quatro posições:

i	p	i	i	p	i	p	i	p
5 alg.	4 alg.	4 alg.	3 alg.	3 alg.	2 alg.	2 alg.	1 alg.	1 alg.

  Novamente, pelo **Princípio Fundamental da Contagem** temos $\boxed{5! \times 4!}$ modos de formar esse tipo de números.

- **Forma** $\boxed{iipipipip}$:

  Temos cinco algarismos ímpares para ocuparem cinco posições e quatro algarismos pares para ocuparem quatro posições:

i	i	p	i	p	i	p	i	p
5 alg.	4 alg.	4 alg.	3 alg.	3 alg.	2 alg.	2 alg.	1 alg.	1 alg.

  Também pelo **Princípio Fundamental da Contagem** temos $\boxed{5! \times 4!}$ modos de formar esse tipo de números.

Dessa forma, temos um total de $\boxed{4 \times 5! \times 4!}$ números pares com nove dígitos distintos, todos os nove diferentes de zero, que tenham exatamente dois algarismos ímpares em posições consecutivas.
Aqui, também observamos que se você sabe o que é uma Permutação, você poderia ter feito essa contagem observando que a quantidade das escolhas dos algarismos ímpares corresponde ao número de permutações de cinco objetos distintos ($5!$) e a quantidade das escolhas dos algarismos pares corresponde ao número de permutações de quatro objetos distintos ($4!$)

Finalmente, a probabilidade P de que escolhido ao acaso um dos números do item **(a)** este número tenha exatamente dois dígitos ímpares juntos é dada por:

$$P = \frac{4 \times 5! \times 4!}{161280} = \frac{11520}{161280} = \frac{1}{14} \approx 0,071.$$

Portanto, $\boxed{P \approx 7,1\%}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.