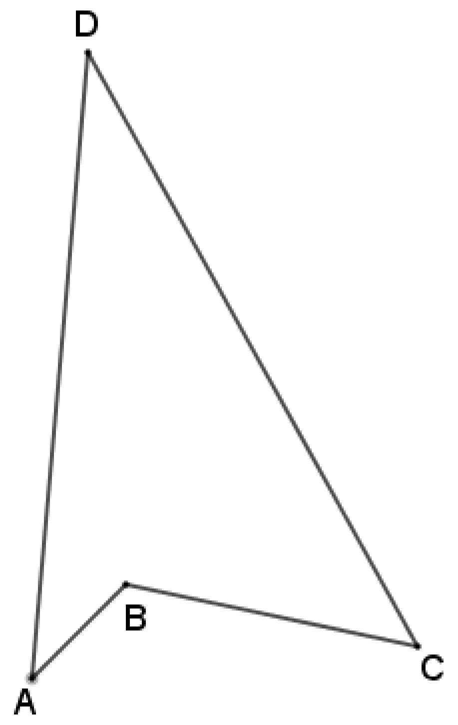
.Problema para ajudar na escola: Área de um quadrilátero

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.- Nível de dificuldade: Difícil)

(**OPM**, 2014 – Adaptado) O quadrilátero $ABCD$ tem três ângulos internos iguais a 45° nos vértices A, C e D. Se o segmento BD mede 8 cm, **quanto mede a área de $ABCD$?**



Lembretes

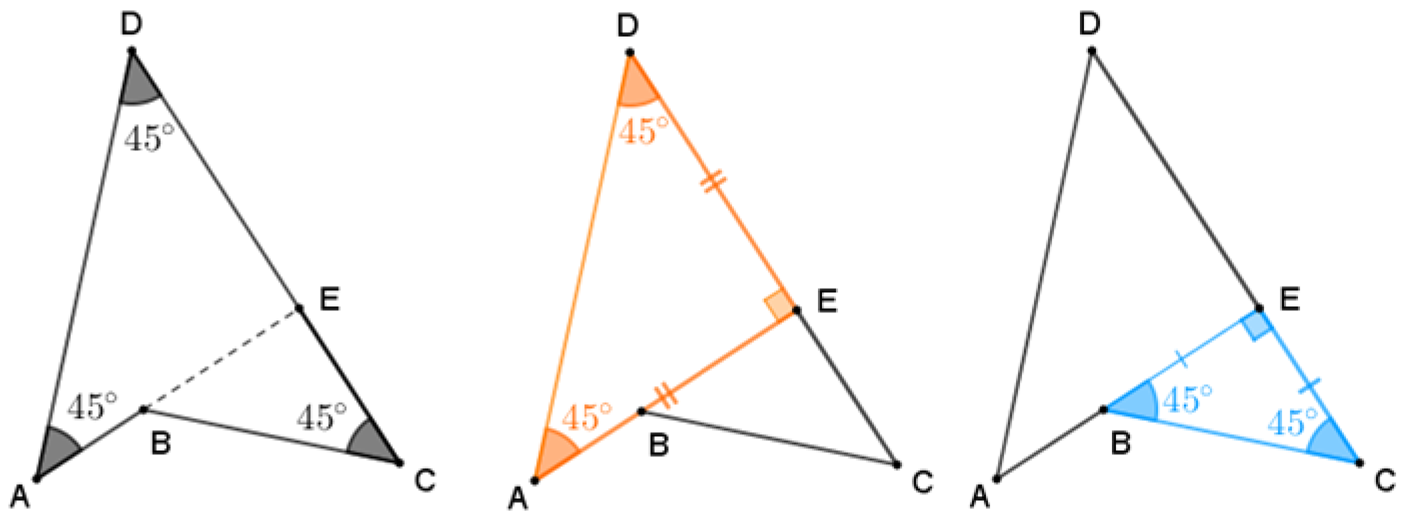
(1) Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.
(2) A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.
(3) Se um triângulo possui dois ângulos com a mesma medida, então este triângulo é isósceles..

Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

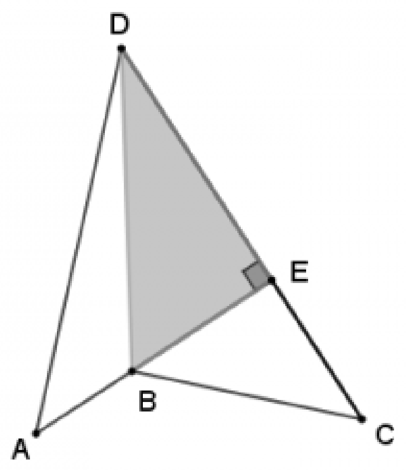
Solução

Seja E o ponto de interseção do segmento $\overline{CD}$ com o prolongamento de $\overline{AB}$.
Observe que:

- Como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem 45°, o **Lembrete (2)** nos permite concluir que a medida do ângulo $A\hat{E}D$ é 90° e, portanto, o triângulo AED é retângulo. Mais do que isso, pelo **Lembrete (3)** AED é um triângulo retângulo isósceles, com $EA = ED$. Assim, a medida S_1 da área de AED é dada por:
$$S_1 = \frac{EA \cdot ED}{2} = \frac{1}{2}ED^2.$$
- Por outro lado, como o ângulo de vértice em E é um ângulo reto e a medida do ângulo $\hat{C}$ é 45°, o **Lembrete (2)** nos garante que a medida do ângulo $C\hat{B}E$ é 45°. Portanto, pelo **Lembrete (3)** , o triângulo BEC é também um triângulo isósceles retângulo em E. Com isso, $EB = EC$ e a medida S_2 da área de BEC é dada por:
$$S_2 = \frac{EB \cdot EC}{2} = \frac{1}{2}EB^2.$$



Note que a área do quadrilátero $ABCD$ é a soma das áreas dos triângulos AED e BEC; assim, se S for a medida da área de $ABCD$, então:
$$S = S_1 + S_2$$
$$S = \frac{1}{2}ED^2 + \frac{1}{2}EB^2$$
$$S = \frac{1}{2}\left(ED^2 + EB^2\right). \qquad (i)$$
Mas lembre-se de que o ângulo de vértice em E é retângulo; logo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo BED, já que o problema nos fornece $BD = 8\text{ cm}$.
Assim, segue que:
$$ED^2 + EB^2 = BD^2$$
$$ED^2 + EB^2 = 8^2$$
$$ED^2 + EB^2 = 64. \qquad (ii)$$



Substituindo (ii) em (i), obtemos
$$S = \frac{1}{2} \cdot 64$$
$$S = 32.$$
Portanto, a medida da área do quadrilátero $ABCD$ é $\boxed{32\text{ cm}^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.