.Problema para ajudar na escola: Um sistema com infinitas soluções

Problema

(A partir do 1º ano do E. M. – Nível de dificuldade: Médio**)**

(**ONEM**, 2011) O sistema

$$\begin{cases} 3ax + 2by = 16 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

tem infinitas soluções para as variáveis x e y.
Determinar os possíveis valores de a e de b.

Solução 1

Da segunda equação que compõe o sistema, obtemos que $2y = 8 - x$ e substituindo essa expressão na primeira equação segue que

$$3ax + b\,(8 - x) = 16$$
$$3ax + 8b - bx = 16$$
$$(3a - b)\,x + 8b = 16$$
$$(3a - b)\,x = 16 - 8b. \qquad (i)$$

Perceba que se $3a - b \neq 0$, concluiríamos de (i) que $x = \dfrac{16 - 8b}{3a - b}$ e, portanto, x teria um único valor, o que contradiz a hipótese de que a variável x tem infinitos valores.
Dessa forma, $3a - b = 0$ e, por (i), segue que $16 - 8b = 0$ e, então, $\boxed{b = 2}$.

Como $3a - b = 0$ e $b = 2$, temos que $\boxed{a = \dfrac{2}{3}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

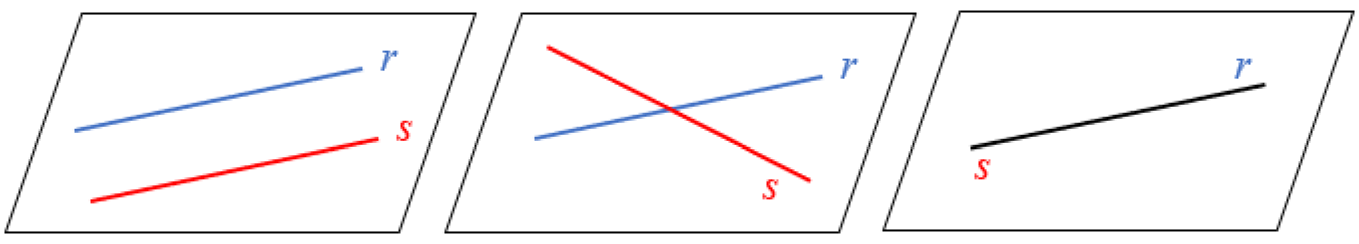
Observe que se $b = 0$, segue da primeira equação do sistema que $3ax = 16$. Então:

- Se $a = 0$, teríamos $0 = 16$, o que é um absurdo.
- Se $a \neq 0$, teríamos $x = \dfrac{16}{3a}$, o que contrariaria a hipótese de que o sistema tem infinitas soluções.

Dessa forma, $b \neq 0$ e consequentemente o sistema dado no problema é equivalente ao sistema

$$S_1 : \begin{cases} y = -\dfrac{3a}{2b}x + \dfrac{8}{b} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases}.$$

Em um plano cartesiano xOy, as duas equações desse novo sistema representam um par de retas e sabemos que existem três posições relativas de duas retas coplanares:



retas paralelas *retas concorrentes* *retas coincidentes*

Sabemos também que:

- retas paralelas (distintas) não têm pontos de interseção;
- retas concorrentes têm um único ponto de interseção;
- retas coincidentes têm infinitos pontos de interseção.

Assim, como as soluções x e y do sistema S_1 são as coordenadas dos pontos do plano cartesiano que pertencem às duas retas, com a hipótese de que o sistema original, e consequentemente S_1, tem infinitas soluções para x e y concluímos que as retas definidas pelas equações de S_1 são coincidentes. Dessa forma, essas retas têm os mesmos coeficientes angulares e os mesmos coeficientes lineares

$$y = -\frac{3a}{2b}x + \frac{8}{b} \qquad ; \qquad y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Logo:

$$-\frac{3a}{2b} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{8}{b} = 4.$$

Da segunda igualdade, segue que $\boxed{b = 2}$. Substituindo esse valor na primeira equação, temos que $\dfrac{3a}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$, donde segue que $\boxed{a = \dfrac{2}{3}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Deixe uma resposta

Você precisa fazer o login para publicar um comentário.