

## .Problema para ajudar na escola: Um galão esvaziado



### Problema

(A partir do 7º ano do E. F. – Nível de dificuldade: Médio)

Ao colocar uma bomba de retirar água no galão de sua casa, dona Teresa não percebeu que a bomba estava com defeito e, durante quatro horas, toda a água do galão foi derramada...



Sabemos que, ao término de cada uma hora de vazamento, a água que saiu do galão foi "a metade da água que havia no início da hora mais meio litro".

**Quantos litros de água foram derramados?**

### Solução

Vamos fazer dois esqueminhas para ajudar na solução deste problema.

- Suponha, inicialmente, que  $q$  seja a quantidade de litros de água do galão da casa da dona Teresa em um determinado instante. Quantos litros de água estarão no galão daqui a uma hora?

Seja  $f$  essa quantidade; assim,  $f$  é a diferença entre  $q$  e a quantidade de água derramada em uma hora.

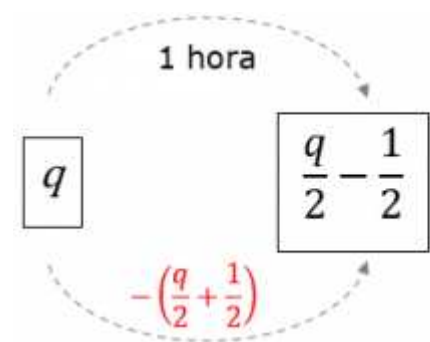
Sabemos que a água que sai do galão em uma hora é "a metade da água que havia no início da hora mais meio litro", logo:

$$f = q - \left( \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$f = q - \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f = \left( q - \frac{q}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}}$$



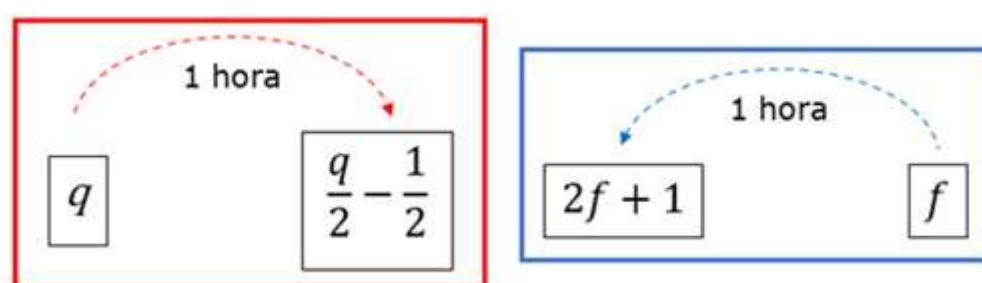
- Suponha, agora, que você conheça a quantidade  $f$  de litros de água que restou no galão da casa da dona Teresa após uma hora de vazamento e que você precise determinar a quantidade  $q$  de litros de água no galão antes do vazamento.

Como  $f = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$ , segue que:

$$2f = q - 1$$

$$\boxed{q = 2f + 1}$$

Veja os dois esqueminhas!



(1) Utilizando o primeiro esquema, se  $A$  era a quantidade de litros de água no galão após Teresa colocar a bomba, segue que:

$$\boxed{A} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \frac{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

Como  $\frac{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{A}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{A}{4} - \frac{3}{4}$ , o esquema de esvaziamento do galão após três horas segue assim:

$$\boxed{A} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{4} - \frac{3}{4}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \frac{\frac{A}{4} - \frac{3}{4}}{2} - \frac{1}{2}$$

Calculando agora  $\frac{\frac{A}{4} - \frac{3}{4}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{A}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{A}{8} - \frac{7}{8}$ , o esquema de esvaziamento do galão após quatro horas fica assim:

$$\boxed{A} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{4} - \frac{3}{4}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{8} - \frac{7}{8}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \frac{\frac{A}{8} - \frac{7}{8}}{2} - \frac{1}{2}$$

Como  $\frac{\frac{A}{8} - \frac{7}{8}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{A}{16} - \frac{7}{16} - \frac{1}{2} = \frac{A}{16} - \frac{15}{16}$  e após quatro horas o galão ficou vazio, o esquema de esvaziamento do galão finaliza desta forma:

$$\boxed{A} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{2} - \frac{1}{2}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{4} - \frac{3}{4}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \boxed{\frac{A}{8} - \frac{7}{8}} \xrightarrow{1 \text{ hora}} \frac{\frac{A}{16} - \frac{15}{16}}{2} = 0.$$

De  $\frac{A}{16} - \frac{15}{16} = 0$ , concluímos que  $A = 15$ . Portanto, foram derramados **15 litros** de água.

(2) Utilizando o segundo esquema, se 0 foi a quantidade de litros de água no galão após quatro horas de vazamento, segue que:

$$2 \cdot 7 + 1 = \boxed{15} \xleftarrow{1 \text{ hora}} 2 \cdot 3 + 1 = \boxed{7} \xleftarrow{1 \text{ hora}} 2 \cdot 1 + 1 = \boxed{3} \xleftarrow{1 \text{ hora}} 2 \cdot 0 + 1 = \boxed{1} \xleftarrow{1 \text{ hora}} \boxed{0}.$$

Portanto, foram derramados **15 litros** de água.