.Problema para ajudar na escola: Soma de três inversos

Problema

(A partir do 1º ano do E. M.)

(**ONEM**, 2011) Sejam a, b e c números reais, distintos dois a dois, tais que

$$a=\sqrt[3]{1-4b-4c}\ ,$$
$$b=\sqrt[3]{1-4c-4a}\ ,$$
$$c=\sqrt[3]{1-4a-4b}\ .$$

Determinar o valor da soma $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

AJUDA

As ***Relações de Girard*** para uma equação cúbica da forma $\boxed{x^3+kx^2+lx+m=0}$ garantem que, se considerarmos que x_1, x_2 e x_3 são as raízes dessa equação, então:

(i) $x_1+x_2+x_3=-k$;
(ii) $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=l$;
(iii) $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-m$.

Se A e B são números reais, então:

$$A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)\ .$$

Solução

Das duas primeiras igualdades dadas no problema segue que:

$$a^3=1-4b-4c \qquad \text{e} \qquad b^3=1-4c-4a,$$

donde

$$a^3-b^3=(1-4b-4c)-(1-4c-4a)$$
$$a^3-b^3=1-4b-4c-1+4c+4a$$
$$a^3-b^3=4\,(a-b).$$

Utilizando a segunda **AJUDA**, prosseguimos um pouco mais:

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=4\,(a-b).$$
$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-4\,(a-b)=0.$$
$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2-4\right)=0\,. \qquad (i)$$

Como por hipótese a, b e c são números reais distintos dois a dois, particularmente, $a-b\neq 0$. Logo, segue de (i) que:

$$\boxed{a^2+ab+b^2-4=0}\ . \qquad (ii)$$

Vamos repetir os mesmos passos partindo, agora, da segunda e da terceira equações dadas no problema. Iniciando, temos que:

$$b^3=1-4c-4a \qquad \text{e} \qquad c^3=1-4a-4b,$$

donde

$$b^3-c^3=(1-4c-4a)-(1-4a-4b)$$
$$b^3-c^3=1-4c-4a-1+4a+4b$$
$$b^3-c^3=4\,(b-c).$$

Utilizando a segunda **AJUDA**, prosseguimos um pouco mais:

$$(b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)=4\,(b-c).$$
$$(b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)-4\,(b-c)=0.$$
$$(b-c)\left(b^2+bc+c^2-4\right)=0\,. \qquad (iii)$$

Como b e c são números reais distintos, $b-c\neq 0$. Logo, segue de (iii) que:

$$\boxed{b^2+bc+c^2-4=0}\ . \qquad (iv)$$

Agora, fazendo a diferença entre as igualdades (ii) e (iv), obtemos que:

$$a^2+ab+b^2-4-\left(b^2+bc+c^2-4\right)=0$$
$$a^2+ab+b^2-4-b^2-bc-c^2+4=0$$
$$a^2+ab-bc-c^2=0$$
$$a^2+ab-bc-c^2+(ac-ac)=0$$
$$a^2+ab+ac-ac-bc-c^2=0$$
$$a\,(a+b+c)-c\,(a+b+c)=0$$
$$(a-c)\,(a+b+c)=0\,. \qquad (v)$$

Como a e c são números reais distintos, $a-c\neq 0$, donde concluímos de (v) que $\boxed{a+b+c=0}$.

Utilizando a relação $\boxed{a+b+c=0}$ nas igualdades $\boxed{a^3=1-4b-4c}$, $\boxed{b^3=1-4c-4a}$ e $\boxed{c^3=1-4a-4b}$ obtemos que:

$a^3=1-4\,(b+c)$ $a^3=1+4a$ $a^3-4a-1=0$	$b^3=1-4\,(c+a)$ $b^3=1+4b$ $b^3-4b-1=0$	$c^3=1-4\,(a+b)$ $c^3=1+4c$ $c^3-4c-1=0$

As últimas igualdades de cada um dos três casos nos mostram que os números reais a, b e c são raízes duas a duas distintas da equação $X^3-4X-1=0$.

Assim, pelas ***Relações de Girard*** para equações cúbicas, temos que:

$$ab+ac+bc=-4 \qquad \text{e} \qquad abc=1,$$

donde, finalmente, segue que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{-4}{1},$$

ou seja, $\boxed{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=-4}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.