.Problema para ajudar na escola: Múltiplos de 6, múltiplos de 9

Problema

(A partir do 9º ano do E. F. – Nível de dificuldade: Médio**)**

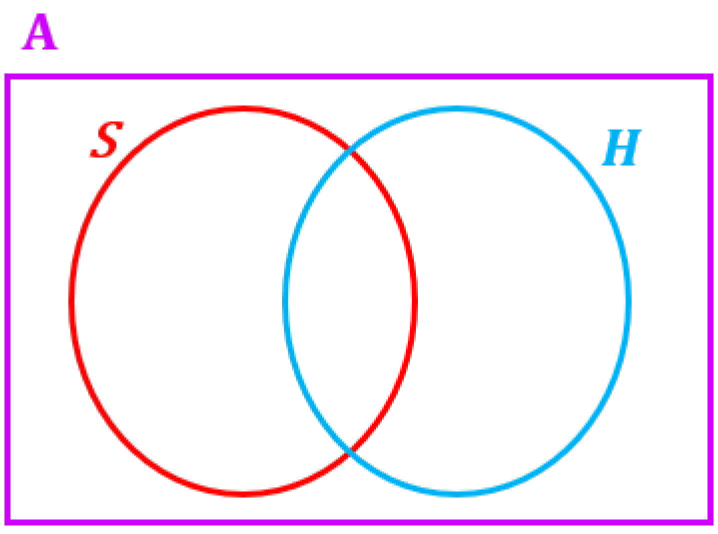
No conjunto A dos números naturais de 1 a 1000, $A=\{1,2,3,...,1000\}$, quantos múltiplos simultâneos de 6 e 9 existem?

Solução

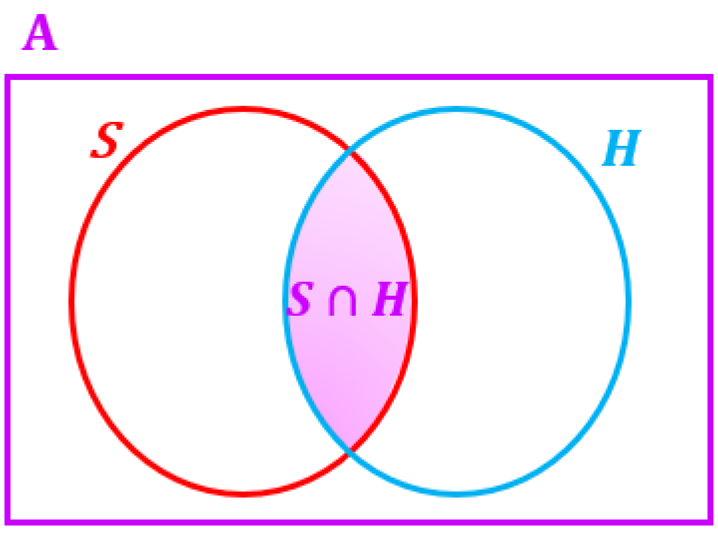
Vamos denotar, respectivamente, por S e por H o conjunto dos múltiplos positivos de 6 e de 9 que estejam no conjunto A. Observe que:

- existem elementos de S que não estão em H; como o próprio 6, por exemplo;
- existem elementos de H que não estão em S; como por exemplo o próprio 9;
- mas também existem elementos que estão em S e em H; como o 18, já que $18=3\times 6$ e $18=2\times 9$;
- existem elementos de A que não estão em H e nem em S; como 1;

assim podemos representar os três conjuntos A, S e H como indicado na figura a seguir.



O que precisamos determinar é quantos elementos do conjunto A são elementos simultaneamente dos conjuntos S e H, ou seja, o número de elementos do conjunto usualmente denominado de "interseção de S e H" e denotado por $S\cap H$.



Os múltiplos simultâneos de 6 e 9 são os múltiplos do **mínimo múltiplo comum de** 6 **e** 9, $mmc(6,9)$; e, como $6=2\times 3$ e $9=3^2$, então $mmc(6,9)=2\times 3^2=18$.
Estamos interessados, portanto, na quantidade de números que satisfaçam duas condições:
(i) sejam múltiplos de 18;
(ii) estejam no conjunto A.
Seja x um desses números.
Por (i), x é múltiplo de 18; logo, existe um número natural t tal que $x=18t$.
Por (ii), $x\in A$, ou seja, $0<x\leqslant 1000$.
Assim, utilizando essas duas informações, segue que:

$$0<x\leqslant 1000$$
$$0<18t\leqslant 1000$$
$$0<t\leqslant\frac{1000}{18}\approx 55,56.$$

Mas t é um número natural; logo, $0<t\leqslant 55$, ou ainda, $\boxed{1\leqslant t\leqslant 55}$.
Como cada número natural t define um número x que satisfaz as condições do problema, temos $\boxed{55}$ múltiplos simultâneos de 6 e 9 no conjunto A.
Aproveitando a notação definida:

$$S\cap N=\{\boxed{18t}\ \text{tal que } 1\leqslant t\leqslant 55,\text{ com } t\in\mathbb{N}\};$$

$$S\cap N=\{\boxed{18\times 1},\boxed{18\times 2},\boxed{18\times 3},\cdots,\boxed{18\times 55}\};$$

$$S\cap N=\{\underbrace{18\,,\,36\,,\,54\,,\cdots,\,990}_{55\text{ elementos}}\}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.