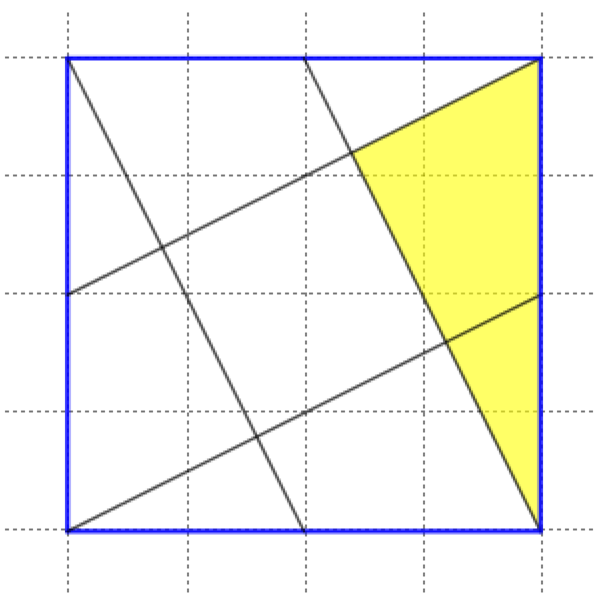
.Problema para ajudar na escola: Medida da área amarela

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Em um papel quadriculado, foi desenhado um quadrado com $4\,\text{cm}$ de lado, conforme mostra a figura.



Determine a medida da área colorida de amarelo.

AJUDAS

(1) Caso de congruência L.A.L. (lado – ângulo – lado): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo por eles definido, então estes triângulos são congruentes.

(Se você não se lembra desse resultado, clique **AQUI**.)

(2) Caso de Semelhança A.A. (ângulo – ângulo): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes.

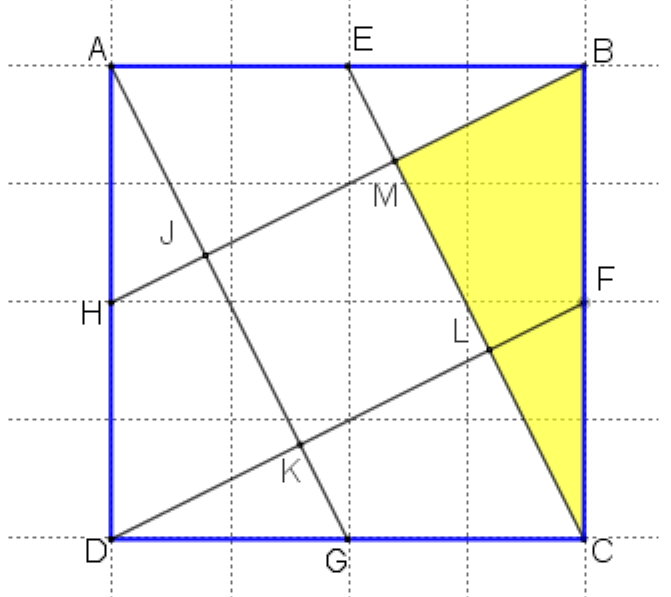
(3) Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais.

(Há uma **Sala de Ajuda** sobre triângulos semelhantes no nosso Blog!)

(4) Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Solução

Para facilitar a solução, vamos nomear alguns pontos que aparecem na figura original do problema.

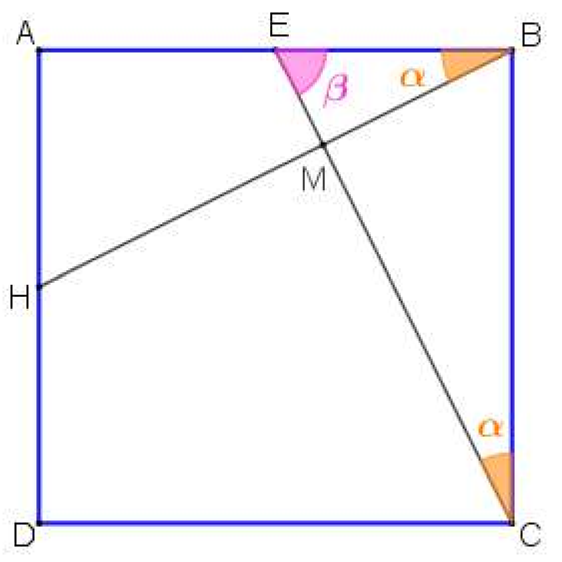


Conforme mostra a figura do problema, a medida S_{am} da área colorida de amarelo é a diferença entre a medida S_1 da área do triângulo CBE e a medida S_2 da área do triângulo MEB. Dessa forma, precisamos determinar S_1 e S_2.

- Como o triângulo CBE é um triângulo retângulo, a medida de sua área é o semiproduto entre as medidas de seus catetos. Sendo E o ponto médio do lado AB do quadrado, segue que:

  $$S_1 = \frac{4 \times 2}{2} = \boxed{4\,\text{cm}^2}. \qquad (i)$$

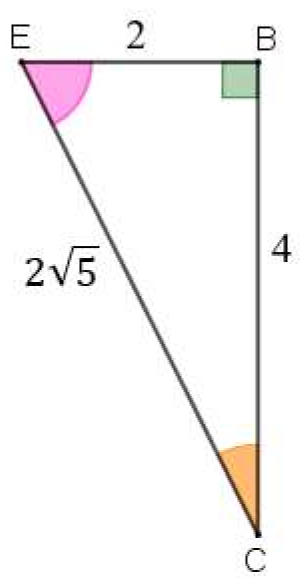
- O cálculo de S_2 não é tão imediato!

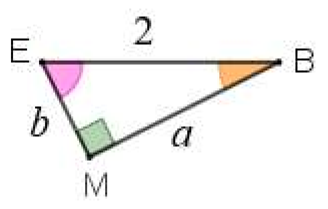
  

  Observe inicialmente que os pontos E e H são pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente. Como os triângulos BAH e CBE são retângulos, então pelo **Lembrete (1)** esses triângulos são congruentes. Assim, os ângulos $B\widehat{C}E$ e $A\widehat{B}H$ têm a mesma medida, digamos α.
  Mas note que o ângulo $M\widehat{E}B$, cuja medida estamos denotando por β, é comum aos triângulos MEB e CBE; logo, pelo **Lembrete (2)** esses triângulos são semelhantes e, portanto, MEB é um triângulo retângulo.
  Sendo um triângulo retângulo, a medida da área do triângulo MEB é o semiproduto entre as medidas de seus catetos. Vamos denotar por a e b o comprimento em centímetros dos catetos MB e ME, respectivamente, e calcular essas medidas.
  Mas antes, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar o comprimento h da hipotenusa do triângulo CBE:

  $$h^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$
  $$h = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}.$$

  Mas h é uma medida de comprimento; assim, $h = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$.





Observando os triângulos semelhantes CBE e MEB, percebemos que, pelo **Lembrete (3)**:

$$\frac{4}{a} = \frac{2}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Com isso, obtemos que:

$$a = \frac{4}{\sqrt{5}}\,\text{cm} \quad \text{e} \quad b = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{cm},$$

donde:

$$S_2 = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\frac{8}{5}}{2}$$
$$S_2 = \boxed{\frac{4}{5}\,\text{cm}^2}. \qquad (ii)$$

Finalmente, por (i) e (ii) segue que:

$$S_{am} = S_1 - S_2$$
$$S_{am} = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}\,\text{cm}^2.$$

Portanto, a medida da área colorida de amarelo é $\boxed{3,2\,\text{cm}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.