.Problema para ajudar na escola: Ali Babão e a décima quinta de suas 40 equações

Problema

(A partir do 2º ano do E. M.)

(**ONEM**, 2011) Se $x,\ y$ e z são números reais tais que $x\geqslant 1$, $y\geqslant \frac{1}{2}$ e $z\geqslant \frac{3}{2}$, encontre **TODAS** as soluções da equação

$$\boxed{(xyz)^2=12\,(x-1)\,(2y-1)\,(2z-3)}\ .$$

Solução

Como do lado esquerdo da equação dada temos o produto $x^2y^2z^2$, iniciaremos a solução deste problema tentando responder as seguintes perguntas:

- Como relacionar x^2 a $x-1$?
- Como relacionar y^2 a $2y-1$?
- Como relacionar z^2 a $2z-3$?

Vamos começar pela segunda pergunta, cuja resposta é a mais intuitiva.

- Observe que $(y-1)^2=y^2-2y+1$ e $(y-1)^2\geqslant 0.$

  Assim:
  $$0\leqslant (y-1)^2=y^2-2y+1$$
  $$2y-1\leqslant y^2\,. \qquad (i)$$

Vamos seguir pelo mesmo caminho e responder a terceira pergunta.

- Note que $(z-3)^2=z^2-6z+9$ e $(z-3)^2\geqslant 0.$

  Com isso:
  $$0\leqslant (z-3)^2=z^2-6z+9$$
  $$6z-9\leqslant z^2$$
  $$3\,(2z-3)\leqslant z^2\,. \qquad (ii)$$
- Para finalizar, veja que $(x-2)^2=x^2-4x+4$ e $(x-2)^2\geqslant 0.$

  Logo:
  $$0\leqslant (x-2)^2=x^2-4x+4$$
  $$4x-4\leqslant x^2$$
  $$4\,(x-1)\leqslant x^2\,. \qquad (iii)$$

Por outro lado, por hipótese temos que:

$$x\geqslant 1,\ y\geqslant \frac{1}{2}\ \text{e}\ z\geqslant \frac{3}{2},$$

donde segue que:

$$x-1\geqslant 0,\ y-\frac{1}{2}\geqslant 0\ \text{e}\ z-\frac{3}{2}\geqslant 0.$$

Com isso,

$$x-1\geqslant 0,\ \frac{2y-1}{2}\geqslant 0\ \text{e}\ \frac{2z-3}{2}\geqslant 0$$

e, portanto,

$$\boxed{x-1\geqslant 0}\ ,\ \boxed{2y-1\geqslant 0}\ \text{e}\ \boxed{2z-3\geqslant 0}. \qquad (iv)$$

Considerando as desigualdades obtidas em (iv), podemos multiplicar as desigualdades (i), (ii) e (iii) e obteremos:

$$4\,(x-1)\cdot(2y-1)\cdot 3\,(2z-3)\leqslant x^2\cdot y^2\cdot z^2$$
$$12\,(x-1)\,(2y-1)\,(2z-3)\leqslant (xyz)^2.$$

Mas estamos interessados nos números reais $x,\ y$ e z que satisfazem a igualdade

$$12\,(x-1)\,(2y-1)\,(2z-3)=(xyz)^2,$$

e essa igualdade ocorre somente quando em (i), (ii) e (iii) ocorrerem igualdades e isso só é possível se:

- $\boxed{(y-1)^2=0}$, $\boxed{(z-3)^2=0}$ e $\boxed{(x-2)^2=0}$.

Portanto, temos apenas uma solução para a décima quinta equação do mestre Ali Babão: $\boxed{\{x=2\,;\ y=1\,;\ z=3\}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.