

.Problema para ajudar na escola: Um triângulo prolongado



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(FGV-SP, 2007 - Adaptado) No triângulo ABC cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} medem 8 cm , 7 cm , 6 cm , respectivamente, o lado \overline{BC} foi prolongado até o ponto D , de modo que os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{C}AD$ ficassem com a mesma medida.
Determine o perímetro do triângulo ABD .

Clique AQUI para abrir um gif animado.

Lembretes



- Caso de Semelhança A.A.** (ângulo - ângulo): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes.
- Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais.
(Há uma [Sala de Ajuda](#) sobre triângulos semelhantes no nosso Blog!)
- Notação:** Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y , por \overline{XY} e o seu comprimento por XY .

Solução

Vamos supor que:

- a e c sejam as medidas, em centímetros, dos segmentos \overline{CD} e \overline{AD} e
- α seja a medida dos ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{C}AD$.

Assim, ficamos com a figura mostrada a seguir.

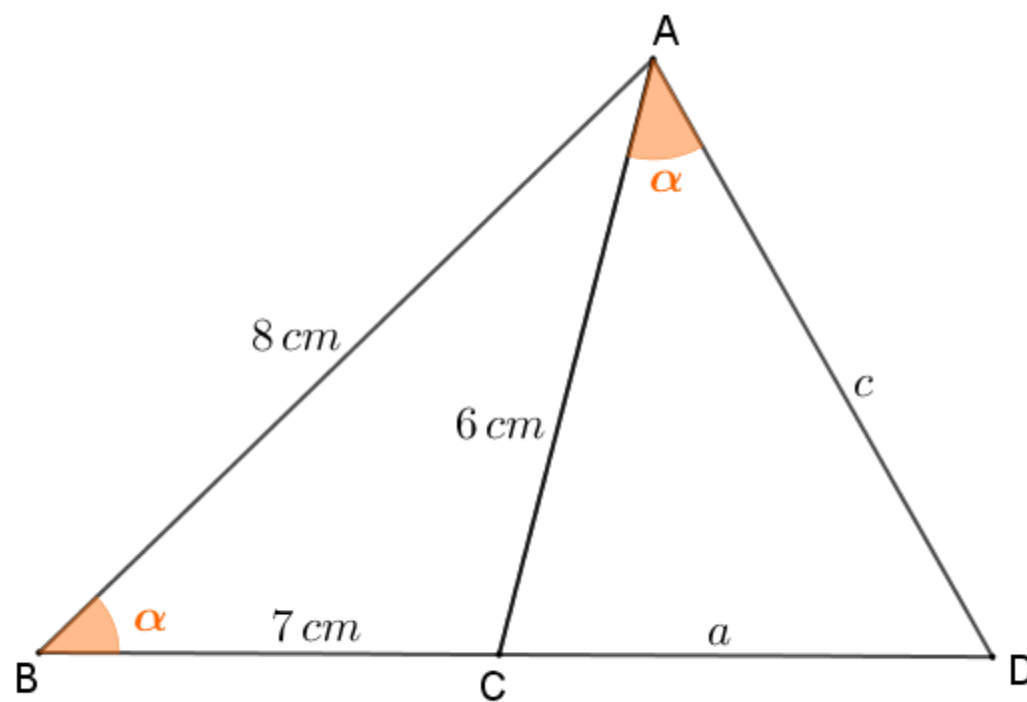
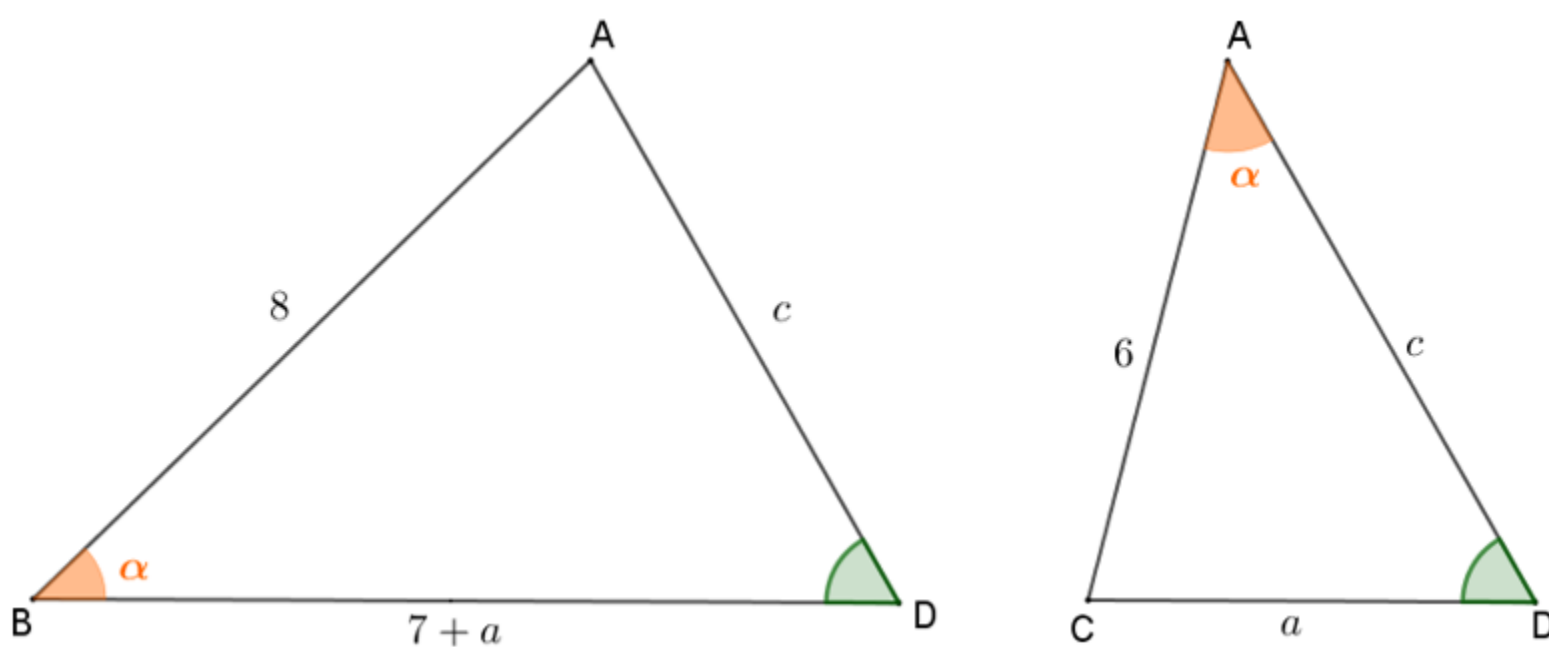


Figura não proporcional aos dados do problema

Vamos olhar para os triângulos DAB e DCA : vemos que os ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{C}AD$ têm a mesma medida e o ângulo de vértice D é comum aos dois triângulos. Logo DAB e DCA são triângulos semelhantes, segundo o **Lembrete (1)**.



Dessa forma, pelo **Lembrete (2)**, temos que $\frac{c}{a} = \frac{8}{6} = \frac{7+a}{c}$, donde podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \frac{8}{6} \\ \frac{c}{a} &= \frac{4}{3} \\ c &= \frac{4}{3} \cdot a. \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{6} &= \frac{7+a}{c} \\ \frac{4}{3} &= \frac{7+a}{c} \\ 4c &= 21 + 3a. \quad (ii) \end{aligned}$$

Agora:

Substituindo (i) em (ii), segue que:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot a &= 21 + 3a \\ 16a &= 63 + 9a \\ 7a &= 63 \\ a &= 9\text{ cm}. \end{aligned}$$

Substituindo $\boxed{a=9}$ em (i), concluímos que:

$$\begin{aligned} c &= \frac{4}{3} \cdot 9 \\ c &= 12\text{ cm}. \end{aligned}$$

Finalmente, observando que os lados do triângulo ABD medem 8 cm , 16 cm e 12 cm , o perímetro desse triângulo é a soma dessas três medidas, ou seja, $\boxed{8 + 16 + 12 = 36\text{ cm}}$.